

## 1 Convergence de suites de fonctions

### Exercice 1 ★ Convergence simple –

Pour  $x \geq 0$  et  $n \geq 1$ , on pose  $f_n(x) = \frac{n}{1+n(1+x)}$ .

1. Démontrer que la suite de fonctions  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge simplement sur  $[0, +\infty[$  vers une fonction  $f$  que l'on précisera.

2. Démontrer que la convergence est en réalité uniforme sur  $[0, +\infty[$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2798]

### Exercice 2 ★★ Étude de convergence simple et uniforme détaillée –

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $f_n(x) = 1 + x + \dots + x^{n-1}$ .

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions  $(f_n)$ . On note  $f(x)$  la limite de la suite  $(f_n(x))$  lorsque cette limite existe.

2. On pose, pour  $x \in ]-1, 1[$ ,  $\varphi_n(x) = f(x) - f_n(x)$ . Vérifier que

$$\varphi_n(x) = \frac{x^n}{1-x}.$$

Quelle est la limite de  $\varphi_n$  en 1 ? En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur  $] -1, 1[$ .

3. Soit  $a \in ]0, 1[$ . Démontrer que  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[-a, a]$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1775]

### Exercice 3 ★ Convergence uniforme sur un intervalle plus petit... –

On pose, pour  $n \geq 1$  et  $x \in ]0, 1]$ ,  $f_n(x) = nx^n \ln(x)$  et  $f_n(0) = 0$ .

1. Démontrer que  $(f_n)$  converge simplement sur  $[0, 1]$  vers une fonction  $f$  que l'on précisera. On note ensuite  $g = f - f_n$ .

2. Étudier les variations de  $g$ .

3. En déduire que la convergence de  $(f_n)$  vers  $f$  n'est pas uniforme sur  $[0, 1]$ .

4. Soit  $a \in [0, 1[$ . En remarquant qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $e^{-1/n} \geq a$  pour tout  $n \geq n_0$ , démontrer que la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, a]$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1776]

### Exercice 4 ★★ Exemples de convergence uniforme –

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions  $(f_n)$  suivantes :

1.  $f_n(x) = e^{-nx} \sin(2nx)$  sur  $^+$  puis sur  $[a, +\infty[$ , avec  $a > 0$ .

2.  $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$  sur  $\mathbb{R}$ , puis sur  $[a, +\infty[$  avec  $a > 0$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1777]

### Exercice 5 ★★ Avec paramètre –

Soit  $a \geq 0$ . On définit la suite de fonctions  $(f_n)$  sur  $[0, 1]$  par  $f_n(x) = n^a x^n (1-x)$ . Montrer que la suite  $(f_n)$  converge simplement vers 0 sur  $[0, 1]$ , mais que la convergence est uniforme si et seulement si  $a < 1$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1778]

### Exercice 6 ★★ Fonction décroissante –

On pose  $f_n : x \mapsto ne^{-n^2 x^2}$ . Étudier la convergence simple de  $(f_n)$  sur  $\mathbb{R}$ . Montrer la convergence uniforme sur  $[a, +\infty[$ , avec  $a > 0$ . Étudier la convergence uniforme sur  $]0, +\infty[$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1779]

---

**Exercice 7** ★ **Convergence uniforme et dérivabilité –**

---

Soit  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ . Démontrer que chaque  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et que la suite de fonctions  $(f_n)$  converge uniformément vers une fonction  $f$ .  $f$  est-elle  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1780]

---

**Exercice 8** ★★ **Permutation limite/intégrale –**

---

Soit  $(f_n)$  la suite de fonctions définie sur  $[0, 1]$  par  $f_n(x) = n^2 x(1 - nx)$  si  $x \in [0, 1/n]$  et  $f_n(x) = 0$  sinon.

1. Étudier la limite simple de la suite  $(f_n)$ .
2. Calculer  $\int_0^1 f_n(t) dt$ . Y-a-t-il convergence uniforme sur  $[0, 1]$  ?
3. Étudier la convergence uniforme sur  $[a, 1]$  pour  $a \in ]0, 1]$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1782]

---

**Exercice 9** ★★★ **Exemples plus difficiles –**

---

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions  $(f_n)$  suivantes :

1.  $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n\sqrt{x}}$  sur  $+$  ;
2.  $f_n(x) = (\sin x)^n \cos(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .
3.  $f_n(x) = e^{\frac{(n-1)x}{n}}$  sur  $\mathbb{R}$ , puis sur  $] -\infty, b]$  avec  $b \in \mathbb{R}$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1783]

---

**Exercice 10** ★★ **Limite de la dérivée –**

---

On définit une suite de fonction  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $[0, 1]$  par  $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ . Montrer que  $(f_n)$  converge uniformément sur  $[0, 1]$  vers une fonction dérivable  $f$  ;  $(f'_n)$  converge simplement sur  $[0, 1]$  vers une fonction  $g$  ;  $f' \neq g$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2211]

---

**Exercice 11** ★★★★★ **Une belle bosse –**

---

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite  $(f_n)$  de fonctions définies sur  $+$  par :

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \text{ pour } x \in [0, n], \text{ et } 0 \text{ ailleurs.}$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1784]

---

**Exercice 12** ★★★★★ **Approximation polynomiale de la racine carrée –**

---

On définit une suite de fonctions  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  par  $f_0 = 0$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in I = [0, 1]$ ,

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2} (x - (f_n(x))^2).$$

1. Montrer que la suite  $(f_n)$  converge simplement sur  $I$  vers la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$ .
2. Démontrer que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$0 \leq \sqrt{x} - f_n(x) \leq \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n.$$

3. En déduire que la convergence est uniforme sur  $I$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1785]

## 2 Exercices théoriques

### Exercice 13 ★ Convergence uniforme et fonctions bornées –

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions bornées,  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$ . Montrer que  $f$  est bornée. Le résultat persiste-t-il si on suppose uniquement la convergence simple ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1786]

### Exercice 14 ★ Convergence simple et fonctions décroissantes –

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions décroissantes définies sur  $[0, 1]$  telle que  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction nulle. Montrer que la convergence est en fait uniforme.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1791]

### Exercice 15 ★ Convergence uniforme et produit –

Soient  $(f_n)$  et  $(g_n)$  deux suites de fonctions définies sur un même intervalle  $I$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $(f_n)$  et  $(g_n)$  convergent uniformément sur  $I$  vers respectivement  $f$  et  $g$ . On suppose de plus que  $f$  et  $g$  sont bornées. Démontrer que  $(f_n g_n)$  converge uniformément vers  $f g$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1787]

### Exercice 16 ★★ Convergence uniforme et continuité uniforme –

Démontrer que la limite uniforme d'une suite de fonctions uniformément continues est elle-même uniformément continue.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1788]

### Exercice 17 ★★★ Avec dérivée seconde bornée –

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  telle que  $f''$  est bornée. Démontrer que la suite de fonctions  $(f_n)$  définie par  $f_n(x) = n(f(x + 1/n) - f(x))$  converge uniformément vers  $f'$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1789]

### Exercice 18 ★★★★ Limite uniforme de polynômes –

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $(P_n)$  une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

1. Justifier qu'il existe un entier  $N$  tel que, pour tout  $n \geq N$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on ait  $|P_n(x) - P_N(x)| \leq 1$ .
2. Que dire du polynôme  $P_n - P_N$  ?
3. En déduire que  $f$  est nécessairement un polynôme.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1790]

### Exercice 19 ★★★★★ Convergence uniforme des suites de fonctions convexes –

1. Soient  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  avec  $\alpha < \beta$ ,  $M \geq 0$  et  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite de fonctions  $M$ -lipschitziennes de  $[\alpha, \beta]$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que si  $(f_n)$  converge simplement vers une fonction  $f$  sur  $[\alpha, \beta]$ , la convergence est en fait uniforme.

2. Soient  $]a, b[$  un intervalle ouvert, et  $(f_n)$  une suite de fonctions convexes de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  qui converge simplement vers  $f$ . Montrer que  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur tout segment inclus dans  $]a, b[$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[614]

### Exercice 20 ★★★★★ Une drôle d'équation différentielle –

On définit une suite  $(u_n)$  de fonctions de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  par  $u_0(x) = 1$  et pour tout  $n \geq 0$ ,

$$u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t - t^2) dt.$$

1. Montrer que, pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$|u_{n+1}(x) - u_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

2. En déduire la convergence simple de la suite  $(u_n)$  sur  $[0, 1]$ . On note  $u$  sa limite.

3. Démontrer que la suite  $(u_n)$  converge uniformément vers  $u$  sur  $[0, 1]$  et que  $u$  n'est pas identiquement nulle.

4. Démontrer que  $u$  est solution de l'équation différentielle  $u'(x) = u(x - x^2)$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1814]

### 3 Divers modes de convergence des séries de fonctions

#### Exercice 21 ★★ Exemples et contre-exemples –

Pour  $x \geq 0$ , on pose  $u_n(x) = \frac{x}{n^2 + x^2}$ .

1. Montrer que la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+$ .

2. Montrer que la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  converge uniformément sur tout intervalle  $[0, A]$ , avec  $A > 0$ .

3. Vérifier que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{n^2 + k^2} \geq \frac{1}{5}$ .

4. En déduire que la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$  ne converge pas uniformément sur  $\mathbb{R}_+$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1795]

#### Exercice 22 ★★ Exemples et contre-exemples –

Pour  $x \in I = [0, 1]$ ,  $a \in \mathbb{R}$  et  $n \geq 1$ , on pose  $u_n(x) = n^a x^n (1 - x)$ .

1. Étudier la convergence simple sur  $I$  de la série de terme général  $u_n$ . On notera dans la suite  $S$  la somme de la série.

2. Étudier la convergence normale sur  $I$  de la série de terme général  $u_n$ .

3. On suppose dans cette question que  $a = 0$ . Calculer  $S$  sur  $[0, 1]$ . En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur  $[0, 1]$ .

4. On suppose  $a > 0$ . Démontrer que la convergence n'est pas uniforme sur  $I$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1796]

#### Exercice 23 ★★ Convergence uniforme –

Pour  $n \geq 1$  et  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $u_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$ .

1. Démontrer que la série  $\sum_n u_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+$ .

2. Démontrer que la convergence n'est pas normale sur  $\mathbb{R}_+$ .

3. Démontrer que la convergence est normale sur tout intervalle  $[a, +\infty[$  avec  $a > 0$ .

4. La convergence est-elle uniforme sur  $\mathbb{R}_+$  ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1797]

#### Exercice 24 ★★ Critère des séries alternées –

Soit  $u_n(x) = (-1)^n \ln \left( 1 + \frac{x}{n(1+x)} \right)$  défini pour  $x \geq 0$  et  $n \geq 1$ .

1. Montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+$ .

2. Montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}_+$ .

3. La convergence est-elle normale sur  $\mathbb{R}_+$  ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1798]

#### Exercice 25 ★★ Uniforme non normale –

On considère la série de fonctions  $\sum_{n \geq 2} u_n$ , avec  $u_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$ .

1. Démontrer que  $\sum_{n \geq 2} u_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+$ .

2. Démontrer que la convergence n'est pas normale sur  $\mathbb{R}_+$ .
3. Pour  $x \in \mathbb{R}_+$ , on pose  $R_n(x) = \sum_{k \geq n+1} u_k(x)$ . Démontrer que, pour tout  $x > 0$ ,

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{xe^{-x}}{\ln(n+1)(1-e^{-x})},$$

et en déduire que la série converge uniformément sur  $\mathbb{R}_+$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1799]

### Exercice 26 ★★★★★ Suites et séries –

Soit  $g : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et bornée telle que  $g(0) = 0$ . On considère la suite de fonctions définie sur  $[0, +\infty[$  par  $f_n(x) = g(x)e^{-nx}$ .

1. Étudier la convergence simple de la suite. Montrer que la suite converge uniformément sur tout intervalle  $[a, +\infty[$ , avec  $a > 0$ . On fixe  $\varepsilon > 0$ . Montrer que l'on peut choisir  $a > 0$  tel que  $|f_n(x)| \leq \varepsilon$  pour tout  $x \in [0, a]$  et pour tout  $n \geq 1$ . En déduire que la suite converge uniformément sur  $[0, +\infty[$ .

2. Étudier la convergence simple de la suite.

3. Montrer que la suite converge uniformément sur tout intervalle  $[a, +\infty[$ , avec  $a > 0$ .

4. On fixe  $\varepsilon > 0$ . Montrer que l'on peut choisir  $a > 0$  tel que  $|f_n(x)| \leq \varepsilon$  pour tout  $x \in [0, a]$  et pour tout  $n \geq 1$ . En déduire que la suite converge uniformément sur  $[0, +\infty[$ .

5. On considère la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} g(x)e^{-nx}$ .

Démontrer qu'elle converge simplement sur  $[0, +\infty[$  et normalement sur tout intervalle  $[a, +\infty[$  avec  $a > 0$ . Démontrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

la courbe représentative de  $g$  est tangente à l'axe des abscisses à l'origine ; la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} g(x)e^{-nx}$  converge uniformément sur  $[0, +\infty[$ .

6. Démontrer qu'elle converge simplement sur  $[0, +\infty[$  et normalement sur tout intervalle  $[a, +\infty[$  avec  $a > 0$ .

7. Démontrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

la courbe représentative de  $g$  est tangente à l'axe des abscisses à l'origine ; la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} g(x)e^{-nx}$  converge uniformément sur  $[0, +\infty[$ .

8. la courbe représentative de  $g$  est tangente à l'axe des abscisses à l'origine ;

9. la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} g(x)e^{-nx}$  converge uniformément sur  $[0, +\infty[$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1800]

## 4 Etude de fonctions définies comme la somme d'une série

### Exercice 27 ★ Série alternée –

On considère la série de fonctions  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ .

1. Prouver que  $S$  est définie sur  $I = ]-1, +\infty[$ .

2. Prouver que  $S$  est continue sur  $I$ .

3. Prouver que  $S$  est dérivable sur  $I$ , calculer sa dérivée et en déduire que  $S$  est croissante sur  $I$ .

4. Quelle est la limite de  $S$  en  $-1$  ? en  $+\infty$  ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1802]

### Exercice 28 ★★ Régularité et limite aux bornes –

Pour  $n \geq 1$  et  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $u_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}$ .

1. Démontrer que la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$ . On note  $S$  sa somme.

2. Démontrer que  $S$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

3. Démontrer que  $S$  admet une limite en  $+\infty$  et la déterminer.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3470]

### Exercice 29 ★★★★★ Série alternée –

---

Pour  $x > 0$ , on pose  $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$ .

1. Justifier que  $S$  est définie et continue sur  $]0, +\infty[$ .
2. Déterminer la limite de  $S$  en  $+\infty$ .
3. Établir que  $S$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$  et déterminer  $S'$ .

[Indication ▼](#)    [Correction ▼](#)

[1803]

---

### Exercice 30 Tangente verticale à l'origine –

Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on pose  $u_n(t) = \frac{\arctan(nt)}{n^2}$ .

1. Justifier que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , la série  $\sum_{n \geq 1} u_n(t)$  est convergente. On note  $S(t)$  sa somme.
2. Démontrer que  $S$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  et impaire.
3. Déterminer la limite de  $S$  en  $+\infty$  (on rappelle que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ).
4. Quel est le sens de variation de  $S$ ?
5. Soit  $N \in \mathbb{N}$ . Démontrer qu'il existe un réel  $t_0 > 0$  tel que, pour tout  $t \in ]-t_0, t_0[ \setminus \{0\}$ , on a

$$\sum_{n=1}^N \frac{u_n(t)}{t} \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}.$$

6. En déduire que la courbe représentative de  $S$  admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.
7. Tracer la courbe représentative de  $S$ .

[Indication ▼](#)    [Correction ▼](#)

[1806]

---

### Exercice 31 Fonction zeta –

On appelle fonction  $\zeta$  de Riemann la fonction de la variable  $s \in \mathbb{R}$  définie par la formule

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

1. Donner le domaine de définition de  $\zeta$  et démontrer qu'elle est strictement décroissante sur celui-ci.
2. Prouver que  $\zeta$  est continue sur son domaine de définition.
3. Déterminer  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \zeta(s)$ .
4. Montrer que pour tout entier  $k \geq 1$  et tout  $s > 1$ , on a

$$\frac{1}{(k+1)^s} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^s} \leq \frac{1}{k^s}.$$

En déduire que  $\zeta(s) \sim_{1+} \frac{1}{s-1}$ .

5. Démontrer que  $\zeta$  est convexe.
6. Tracer la courbe représentative de  $\zeta$ .

[Indication ▼](#)    [Correction ▼](#)

[1804]

---

### Exercice 32 Étude –

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $u_n(x) = \frac{1}{n+n^2x}$ .

1. Étudier la convergence simple de la série  $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ . On note  $S(x)$  sa somme.
2. Démontrer que  $S$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
3. Étudier la monotonie de  $S$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
4. Déterminer la limite de  $S$  en  $+\infty$ .
5. Justifier que  $S$  admet une limite en 0. Démontrer que, pour tout entier  $N$ , on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} S(x) \geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}.$$

En déduire la valeur de  $\lim_{x \rightarrow 0} S(x)$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1807]

---

**Exercice 33** ★★★★★ **Non-dérivabilité à droite d'une fonction limite –**

---

On considère la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{-nt}}{1+n^2}$  et on note  $f$  sa somme.

1. Quel est le domaine de définition de  $f$  ?
2. Démontrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$  et de classe  $C^\infty$  sur  $]0, +\infty[$ .
3. On fixe  $A > 0$ .  
Justifier l'existence d'un entier  $N \geq 1$  tel que

$$\sum_{n=1}^N \frac{n}{1+n^2} \geq A.$$

En déduire qu'il existe  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $h \in ]0, \delta[$ ,

$$\sum_{n=1}^N \frac{e^{-nh} - 1}{h(1+n^2)} \leq -A + 1.$$

Démontrer que  $f$  n'est pas dérivable en 0, mais que sa courbe représentative admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.

4. Justifier l'existence d'un entier  $N \geq 1$  tel que

$$\sum_{n=1}^N \frac{n}{1+n^2} \geq A.$$

5. En déduire qu'il existe  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $h \in ]0, \delta[$ ,

$$\sum_{n=1}^N \frac{e^{-nh} - 1}{h(1+n^2)} \leq -A + 1.$$

6. Démontrer que  $f$  n'est pas dérivable en 0, mais que sa courbe représentative admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.

7. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1808]

---

**Exercice 34** ★★★★★ **Limite en  $+\infty$  par comparaison à une intégrale –**

---

Soit la série de fonctions  $S(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x}{n^2 + x^2}$ .

1. Démontrer que  $S$  définit une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ .
2. Soit  $x > 0$  et  $n \geq 1$ . Justifier que

$$\int_n^{n+1} \frac{x}{x^2 + t^2} dt \leq \frac{x}{x^2 + n^2} \leq \int_{n-1}^n \frac{x}{x^2 + t^2} dt.$$

3. En déduire que  $S$  admet une limite en  $+\infty$  et la déterminer.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1809]

---

**Exercice 35** ★★★★★ **Série télescopique –**

---

Sur  $I = ]-1, +\infty[$ , on pose

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right).$$

1. Montrer que  $S$  est définie et continue sur  $I$ .
2. Étudier la monotonie de  $S$ .
3. Calculer  $S(x+1) - S(x)$ .

4. Déterminer un équivalent de  $S(x)$  en  $-1^+$ .
5. Établir que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .
6. En déduire un équivalent de  $S(x)$  en  $+\infty$ .

Indication ▼ Correction ▼

[1813]

### Exercice 36 ★★★★★ Abel sans le dire –

Soit  $(f_n)_{n \geq 1}$  la suite de fonctions définies sur  $[-1, 1]$  par  $f_n(t) = \frac{1}{n} t^n \sin nt$ .

1. Montrer que la série  $\sum f_n$  converge simplement sur  $] -1, 1[$ .
2. Soit  $a \in ]0, 1[$ .

Montrer que la série  $\sum f'_n$  converge normalement sur  $[-a, a]$ . En déduire que la fonction  $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -1, 1[$  et montrer que, pour  $x \in ] -1, 1[$ ,

$$f'(x) = \frac{\sin x + x \cos x - x^2}{1 - 2x \cos x + x^2}.$$

Montrer que  $f(t) = \arctan \frac{t \sin t}{1 - t \cos t}$  pour  $t \in ] -1, 1[$ .

3. Montrer que la série  $\sum f'_n$  converge normalement sur  $[-a, a]$ .
4. En déduire que la fonction  $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -1, 1[$  et montrer que, pour  $x \in ] -1, 1[$ ,

$$f'(x) = \frac{\sin x + x \cos x - x^2}{1 - 2x \cos x + x^2}.$$

5. Montrer que  $f(t) = \arctan \frac{t \sin t}{1 - t \cos t}$  pour  $t \in ] -1, 1[$ .

6. On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in [-1, 1]$ ,  $A_n(t) = \sum_{k=1}^n t^k \sin kt$ .

Montrer qu'il existe  $M > 0$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in [-1, 1]$  on ait  $|A_n(t)| \leq M$ . Montrer en écrivant  $t^k \sin(kt) = A_k(t) - A_{k-1}(t)$  que

$$\sum_{k=1}^n \frac{t^k \sin kt}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k(t)}{k(k+1)} + \frac{A_n(t)}{n}.$$

En déduire que la série  $\sum_n f_n$  converge simplement sur  $[-1, 1]$  et que  $f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A_k(t)}{k(k+1)}$  sur  $[-1, 1]$ . Montrer

que  $f$  est continue sur cet intervalle. En déduire les valeurs de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$  et de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{n}$ .

7. Montrer qu'il existe  $M > 0$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in [-1, 1]$  on ait  $|A_n(t)| \leq M$ .
8. Montrer en écrivant  $t^k \sin(kt) = A_k(t) - A_{k-1}(t)$  que

$$\sum_{k=1}^n \frac{t^k \sin kt}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k(t)}{k(k+1)} + \frac{A_n(t)}{n}.$$

9. En déduire que la série  $\sum_n f_n$  converge simplement sur  $[-1, 1]$  et que  $f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A_k(t)}{k(k+1)}$  sur  $[-1, 1]$ .

Montrer que  $f$  est continue sur cet intervalle.

10. En déduire les valeurs de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$  et de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{n}$ .

Indication ▼ Correction ▼

[1810]

### Exercice 37 ★★★★★ Zeta alternée –



---

On considère la fonction  $\mu(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ .

1. Quel est le domaine de définition de  $\mu$  ?
2. Montrer que  $\mu$  est de classe  $C^\infty$  sur son domaine de définition.
3. Démontrer que  $\mu$  admet une limite en  $+\infty$  et la calculer.
4. On souhaite démontrer que  $\mu$  admet une limite en 0.  
Démontrer que, pour tout  $x > 0$ , on a

$$-1 + 2\mu(x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \left( \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \right).$$

En déduire que pour tout  $x > 0$ , on a

$$0 \leq -1 + 2\mu(x) \leq 1 - \frac{1}{2^x}.$$

Conclure.

5. Démontrer que, pour tout  $x > 0$ , on a

$$-1 + 2\mu(x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \left( \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \right).$$

6. En déduire que pour tout  $x > 0$ , on a

$$0 \leq -1 + 2\mu(x) \leq 1 - \frac{1}{2^x}.$$

7. Conclure.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1811]

---

### Exercice 38 ★★★★★ Non-dérivabilité à droite d'une fonction limite –

Soit la série de fonctions  $\sum_{n \geq 2} f_n$ , avec  $f_n(x) = \frac{x e^{-nx}}{\ln n}$ . On note  $S$  sa somme.

1. Etudier la convergence simple, normale, uniforme de cette série sur  $[0, +\infty[$ .
2. Montrer que  $S$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$ .
3. Montrer que  $S$  n'est pas dérivable à droite en 0.
4. Montrer que, pour tout  $k$ ,  $S(x) = o(x^{-k})$  en  $+\infty$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1812]

## 5 Applications des séries de fonctions

---

### Exercice 39 ★★ Application à la résolution d'une équation fonctionnelle –

Soit  $C, a > 0$  et  $\phi : [-a, a]$  une fonction continue vérifiant  $|\phi(x)| \leq C|x|$  pour tout  $x \in [-a, a]$ . On souhaite étudier les fonctions  $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant la propriété suivante (notée  $\mathcal{P}$ ) :  $f$  est continue,  $f(0) = 0$  et :

$$\forall x \in [-a, a], f(x) - f(x/2) = \phi(x).$$

1. Montrer que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} \phi\left(\frac{x}{2^n}\right)$  est normalement convergente sur  $[-a, a]$ . On note  $h$  la somme de cette série.
2. Montrer que  $h$  vérifie  $\mathcal{P}$ .
3. Montrer que  $h$  est la seule fonction vérifiant  $\mathcal{P}$ .
4. On suppose de plus que  $\phi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[-a, a]$ . Démontrer que  $h$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[-a, a]$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2815]

**Exercice 40** ★★☆☆ **Résolution d'une équation intégrale –**

On souhaite démontrer qu'il existe une fonction  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que, pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x f(t^2) dt.$$

Pour cela, on considère la suite de fonctions  $(f_n)$  définies sur  $[0, 1]$  par  $f_0 = 1$  et, pour tout  $n \geq 0$  et tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$f_{n+1}(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x f_n(t^2) dt.$$

1. Démontrer que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} (f_{n+1} - f_n)$  converge normalement sur  $[0, 1]$ .
2. En déduire que la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur  $[0, 1]$  vers une fonction  $f$ .
3. Justifier que  $f$  est solution du problème.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3472]

## 6 Théorème de Weierstrass

**Exercice 41** ★★☆☆ **Convergence uniforme d'une suite de polynômes avec contrainte –**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue et  $c \in [a, b]$ . Démontrer qu'il existe une suite  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de polynômes telle que  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, b]$  et  $P_n(c) = f(c)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3466]

**Exercice 42** ★★☆☆ **Théorème des moments –**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On suppose que, pour tout  $k \geq 0$ , on a  $\int_a^b f(t) t^k dt = 0$ .

1. Démontrer que  $\int_a^b f^2(t) dt = 0$ .
2. En déduire que  $f$  est la fonction nulle.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1963]

**Exercice 43** ★★☆☆ **Lemme de Riemann-Lebesgue pour les fonctions continues –**

Soit  $a < b$  deux nombres réels.

1. Soit  $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ . Démontrer que  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt = 0$ .
2. Reprendre la question si on suppose uniquement que  $f \in \mathcal{C}([a, b])$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3468]

**Exercice 44** ★★☆☆ **Théorème de Weierstrass avec des polynômes pairs –**

Soit  $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ . Démontrer que  $f$  est limite uniforme de polynômes pairs.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3467]

---

**Indication pour l'exercice 1 ▲**

1. Lorsque  $x$  est fixé, quelle est la limite de  $f_n(x)$  ?
  2. Calculer  $|f_n(x) - f(x)|$ , puis le majorer par une quantité ne dépendant pas de  $x$ .
- 

**Indication pour l'exercice 2 ▲**

1. Penser aux sommes géométriques.
  2. Idem !
  3. Majorer  $|\varphi_n(x)|$  pour  $x \in [-a, a]$ .
- 

**Indication pour l'exercice 3 ▲**

1. Séparer les cas  $x = 0, x = 1$  des autres.
  2. Dériver  $g$ .
  3. La question précédente donne la valeur de  $\sup_{x \in [0,1]} |f(x) - f_n(x)|$ .
  4. Pour  $n \geq n_0$  et  $x \in [0, a]$ , on a  $|f(x) - f_n(x)| \leq |f(a) - f_n(a)|$ .
- 

**Indication pour l'exercice 4 ▲**

1. Écrire  $f_n(x)$  sous la forme  $g(nx)$  avec  $g$  une fonction fixe.
  2. La suite ne converge pas uniformément sur  $\mathbb{R}$  car la fonction limite ne vérifie pas une certaine propriété.
- 

**Indication pour l'exercice 5 ▲**

Appliquer la définition de la convergence uniforme en étudiant les variations de  $f_n$  pour déterminer  $\|f_n\|_\infty$ .

---

**Indication pour l'exercice 6 ▲**

$f_n$  est décroissante sur  $[a, +\infty[$ . Calculer  $f_n(1/n)$ .

---

**Indication pour l'exercice 7 ▲**

Pour démontrer la convergence uniforme, on pourra utiliser la quantité conjuguée.

---

**Indication pour l'exercice 8 ▲**

1. La suite  $(f_n(x))$  est stationnaire.
  2. Nier le théorème de permutation limite/intégrale.
  3. Reprendre la méthode de la première question et exploiter le fait que, pour tout  $x \geq a$ , les suites  $(f_n(x))$  sont stationnaires à partir du même rang.
- 

**Indication pour l'exercice 9 ▲**

1. Écrire  $f_n$  sous la forme  $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}g(nx)$ ,  $f_n(0) = 0$ , et prouver que  $g$  est bornée sur  $^+$ .
  2. Étudier  $f_n$ . On ne peut pas trouver l'expression de tous les réels  $x$  pour lesquels  $f'_n(x) = 0$ , mais on peut réinjecter dans  $f_n$ .
  3. Calculer  $f_n(n) - f(n)$  pour la première partie ; utiliser l'inégalité des accroissements finis pour la seconde.
- 

**Indication pour l'exercice 10 ▲**

Il suffit de suivre les techniques classiques d'étude de convergence uniforme (limite simple, puis calcul de  $\sup |f_n - f|$ ...

---

**Indication pour l'exercice 11 ▲**

---

Etudier la norme infinie de la différence  $\varphi_n$  entre  $f_n$  et la limite simple  $f$ . Considérer un point  $x_0$  où  $\varphi'_n(x_0)$  s'annule, et majorer  $|\varphi_n(x_0)|$ . Etudier alors une autre fonction auxiliaire.

---

**Indication pour l'exercice 12 ▲**

1. Traiter cela comme une suite récurrente classique !
  2. Démontrer ceci par récurrence en utilisant que  $f_n(x) \leq \sqrt{x}$ .
  3. Étudier la fonction  $t \mapsto t(1 - t/2)^n$  sur  $[0, 1]$ .
- 

**Indication pour l'exercice 13 ▲**

Écrire la définition de la convergence uniforme pour  $\varepsilon = 1$ , et utiliser l'inégalité triangulaire.

---

**Indication pour l'exercice 14 ▲**

L'écart maximum est réalisé en 0 ou en 1.

---

**Indication pour l'exercice 15 ▲**

Écrire

$$f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x) = (f_n(x) - f(x))g_n(x) + f(x)(g_n(x) - g(x)).$$

---

**Indication pour l'exercice 16 ▲**

Suivre la preuve du cas continu.

---

**Indication pour l'exercice 17 ▲**

Utiliser la formule de Taylor-Lagrange.

---

**Indication pour l'exercice 18 ▲**

1. Utiliser l'inégalité triangulaire en passant par  $f$ .
  - 2.
  3. Écrire  $P_n = P_N + C_n$  avec  $C_n \in \mathbb{R}$  et justifier que la suite  $(C_n)$  est convergente.
- 

**Indication pour l'exercice 19 ▲**

1. Découper l'intervalle  $[\alpha, \beta]$  en plusieurs intervalles  $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$  de sorte que  $\alpha_{i+1} - \alpha_i < \varepsilon/M$ .
  2. Il faut démontrer que la suite  $(f_n)$  est  $M$ -lipschitzienne, pour une certaine constante  $M$ , sur tout segment  $[\alpha, \beta]$  inclus dans  $]a, b[$ . On pourra utiliser une propriété bien connue du taux d'accroissement des fonctions convexes.
- 

**Indication pour l'exercice 20 ▲**

1. Procéder par récurrence en intégrant les inégalités.
  2. Suite télescopique.
  3. Même idée. On pourra aussi calculer  $u(0)$ .
  4. Passage à la limite sous l'intégrale.
- 

**Indication pour l'exercice 21 ▲**

1. La convergence simple se démontre comme la convergence d'une série numérique,
  2. Utiliser la convergence normale.
  3. Majorer le dénominateur.
  4. Procéder par l'absurde.
-

---

**Indication pour l'exercice 22 ▲**

---

- 1.
  2. Calculer  $\|u_n\|_\infty$  en dérivant la fonction  $u_n$ .
  3.  $S(x) = x$  si  $x \in [0, 1[$  (écrire la somme en deux sommes...).
  4. Utiliser le cas  $a = 0$  pour prouver que  $S(x) \geq 1$  si  $a > 0$  et  $x \in ]0, 1[$ .
- 

**Indication pour l'exercice 23 ▲**

---

1. Comparer, à  $x \geq 0$  fixé, à la série  $\sum_n 1/n^2$ .
  2. Calculer  $\|u_n\|_\infty$ .
  3. Si  $n$  est assez grand,  $|u_n(x)| \leq u_n(a)$  pour tout  $x \in [a, +\infty[$ .
  4.  $\|u_n\|_\infty = 4e^{-2}$ .
- 

**Indication pour l'exercice 24 ▲**

---

1. Critère des séries alternées.
  2. Critère des séries alternées+majoration du reste.
  3. On n'a même pas convergence absolue de la série !
- 

**Indication pour l'exercice 25 ▲**

---

- 1.
  - 2.
  3. Utiliser la somme d'une série géométrique, puis justifier que  $x \mapsto \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}$  est bornée sur  $\mathbb{R}_+$ .
- 

**Indication pour l'exercice 26 ▲**

---

1. Utiliser la continuité de  $g$  en 0.
  - 2.
  - 3.
  4. Utiliser la continuité de  $g$  en 0.
  5. Calculer le reste de la série (somme géométrique)
  - 6.
  7. Calculer le reste de la série (somme géométrique)
- 

**Indication pour l'exercice 27 ▲**

---

1. Appliquer le critère des séries alternées.
  2. Appliquer à nouveau le critère des séries alternées. Il donne en effet une majoration du reste qui permet de prouver la convergence uniforme.
  3. Appliquer le théorème de dérivation d'une série de fonctions, puis évaluer la somme partielle de la série dérivée par le critère des séries alternées.
  4. Encadrer  $S(x)$  par la somme partielle d'ordre 1 et celle d'ordre 2.
- 

**Indication pour l'exercice 28 ▲**

---

- 1.
  2. Démontrer la convergence normale sur  $\mathbb{R}$  de la série  $\sum_n u'_n$ . On pourra remarquer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $n \geq 1$ , on a  $|x|/(n^2 + x^2) \leq 1$ .
  3. Utiliser le théorème d'interversion limite/série.
- 

**Indication pour l'exercice 29 ▲**

---

1. Appliquer le critère des séries alternées.
-

2. Appliquer le théorème de permutation limite/séries, ou le critère des séries alternées.
  3. Utiliser le théorème de dérivation sous le signe somme, avec le critère des séries alternées.
- 

#### Indication pour l'exercice 30 ▲

---

- 1.
  2. Convergence normale sur  $\mathbb{R}$  avec  $A > 0$ .
  3. Théorème de la double limite.
  4. Dériver, ou alors utiliser le fait que chaque  $u_n$  est croissante.
  5. C'est un passage à la limite.
  6. Il s'agit de démontrer que  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t) - S(0)}{t - 0} = +\infty$ . Commencer par fixer  $A > 0$  puis  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$ .
- 

#### Indication pour l'exercice 31 ▲

---

1. Pour la décroissance, utiliser que  $s \mapsto n^{-s}$  est décroissante.
  2. Démontrer la convergence normale de la série sur  $[a, +\infty[$ , avec  $a > 1$ .
  3. Utiliser le théorème d'interversion des limites.
  4. Sommer les inégalités.
  5. Dériver deux fois  $\zeta$ .
  - 6.
- 

#### Indication pour l'exercice 32 ▲

---

- 1.
  2. Démontrer la convergence normale sur  $[a, +\infty[$ .
  - 3.
  4. Appliquer le théorème de permutation limite/série.
  - 5.
- 

#### Indication pour l'exercice 33 ▲

---

- 1.
  2. Étudier la convergence normale de la série, puis des séries dérivées.
  3. Quelle est la nature de la série  $\sum_n \frac{n}{1+n^2}$  ? Faire tendre  $h$  vers 0. Minorer le taux d'accroissement de  $f$  en zéro.
  4. Quelle est la nature de la série  $\sum_n \frac{n}{1+n^2}$  ?
  5. Faire tendre  $h$  vers 0.
  6. Minorer le taux d'accroissement de  $f$  en zéro.
  7. Appliquer le théorème d'interversion des limites.
- 

#### Indication pour l'exercice 34 ▲

---

1. Prouver la convergence normale sur  $[-M, M]$ , avec  $M > 0$  quelconque.
  2. La fonction est décroissante.
  3. Sommer les inégalités précédentes.
- 

#### Indication pour l'exercice 35 ▲

---

1. Prouver la convergence uniforme sur tout  $[a, b]$ , avec  $a > -1$ .
2. Chaque terme général est monotone.
3. Faire un changement d'indices pour éliminer plein de termes !
4. Utiliser la question précédente.
5. Utiliser la même question.
6. Utiliser que  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim_{+\infty} \ln n$ , et encadrer  $x$  entre  $[x]$  et  $[x] + 1$ .

---

**Indication pour l'exercice 36 ▲**

---

- 1.
  2. Pour calculer  $f'$ , on pourra utiliser des séries géométriques.
  - 3.
  4. Pour calculer  $f'$ , on pourra utiliser des séries géométriques.
  - 5.
  - 6.
  - 7.
  - 8.
  - 9.
  - 10.
- 

**Indication pour l'exercice 37 ▲**

---

- 1.
  2. Démontrer la convergence uniforme des séries dérivées sur chaque intervalle du type  $[a, b] \subset ]0, +\infty[$ . Attention, la valeur absolue du terme général ne décroît pas vers 0 pour les premiers termes !
  3. Appliquer le théorème d'interversion des limites.
  4. Pour le deuxième point, on pourra utiliser une des conclusions du critère des séries alternées.
- 

**Indication pour l'exercice 38 ▲**

---

1. On a convergence uniforme, mais pas convergence normale.
  2. Faire le changement de variables  $u = e^{-x}$ .
  3. Montrer que  $S(x)/x$  tend vers  $+\infty$ .
  4. Réutiliser le changement de variables de la deuxième question.
- 

**Indication pour l'exercice 39 ▲**

---

1. Majorer, pour tout  $x \in [-a, a]$ ,  $|\phi(x)|$  par un réel  $u_n$  (ne dépendant pas de  $x$ ), et tel que  $\sum_n u_n$  est convergente. On utilisera l'hypothèse faite sur  $\phi$ .
  2. Pour démontrer la continuité de  $h$ , utiliser les théorèmes généraux. Pour démontrer que  $h$  vérifie l'équation, il faut faire un changement d'indice dans une somme.
  3. Procéder par l'absurde en supposant qu'il existe une autre solution  $g$  avec un certain  $x_0 \in [-a, a]$  tel que  $g(x_0) \neq h(x_0)$ .
  - 4.
- 

**Indication pour l'exercice 40 ▲**

---

1. Démontrer que, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\|f_{n+1} - f_n\|_{\infty} \leq \frac{1}{2} \|f_n - f_{n-1}\|_{\infty}.$$

2. La série est télescopique.
  3. Permutation suite/intégrale...
- 

**Indication pour l'exercice 41 ▲**

---

Considérer une suite  $(Q_n)$  de polynômes qui converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, b]$  et la modifier pour obtenir  $(P_n)$ .

---

**Indication pour l'exercice 42 ▲**

---

1. Théorème de Weierstrass.
-

2. Utiliser un théorème bien connu sur l'intégrale des fonctions positives.

---

**Indication pour l'exercice 43 ▲**

---

1. Faire une intégration par parties.
  2. Utiliser le théorème de Weierstrass pour approcher  $f$  par des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ .
- 

**Indication pour l'exercice 44 ▲**

---

Prolonger  $f$  par parité et approcher ce prolongement uniformément sur l'intervalle  $[-1, 1]$  par une suite de polynômes  $(Q_n)$ . Modifier  $Q_n$  pour en faire une fonction paire.

---



---

**Correction de l'exercice 1 ▲**

---

1. L'étude de la convergence simple revient à étudier la convergence des suites  $(f_n(x))_{n \geq 1}$ , lorsque  $x \geq 0$  est fixé. Mais  $x$  étant fixé, puisque  $1+x > 0$ , on a clairement  $f_n(x)$  qui tend vers  $1/(1+x)$ . Donc la suite de fonctions  $(f_n)$  tend simplement sur  $[0, +\infty[$  vers la fonction  $f$  définie par  $f(x) = 1/(1+x)$ .

2. On calcule  $f_n(x) - f(x)$ , puis on majore  $|f_n(x) - f(x)|$ . On a

$$\begin{aligned} f_n(x) - f(x) &= \frac{n}{1+n(1+x)} - \frac{1}{1+x} \\ &= \frac{n(1+x) - 1 - n(1+x)}{(1+x) + n(1+x)^2} \\ &= \frac{-1}{(1+x) + n(1+x)^2}. \end{aligned}$$

Or, pour  $x \geq 0$ , on a

$$1+x+n(1+x)^2 \geq n(1+x)^2 \geq n$$

et donc

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{(1+x) + n(1+x)^2} \leq \frac{1}{n}.$$

Cette dernière quantité ne dépend plus de  $x \in [0, +\infty[$  et tend vers 0. Donc  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, +\infty[$ .

---

**Correction de l'exercice 2 ▲**

---

1. On a, pour  $x \neq 1$ ,

$$f_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x},$$

et donc la suite de réels  $(f_n(x))$  converge vers le réel  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  si  $x \in ]-1, 1[$ . Elle est divergente dans les autres cas (c'est aussi vrai si  $x = 1$ ). La suite  $(f_n)$  converge donc simplement vers  $f$  sur l'intervalle  $] -1, 1[$ .

2. En vertu du calcul de  $f_n$  réalisé à la question précédente, on a

$$\varphi_n(x) = \frac{x^n}{1-x},$$

qui tend vers  $+\infty$  si  $x$  tend vers  $1^-$ . D'où  $\sup_{x \in ]-1, 1[} |f_n(x) - f(x)| = +\infty$  et la convergence n'est pas uniforme sur  $] -1, 1[$ .

3. On va majorer  $|\varphi_n(x)|$  pour  $x \in [-a, a]$ . On pourrait le faire en étudiant les variations de  $\varphi_n$ , mais c'est en réalité inutile ici. En effet, on peut remarquer que si  $x \in [-a, a]$ , on a  $|x^n| \leq a^n$  et  $|1-x| \geq 1-a$ . On en déduit que, pour tout  $x \in [-a, a]$ , on a

$$|\varphi_n(x)| \leq \frac{a^n}{1-a}$$

et le membre de droite de cette inégalité tend vers 0. On en déduit que  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[-a, a]$ .

---

**Correction de l'exercice 3 ▲**

---

1. Montrons que  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction nulle sur  $[0, 1]$  :

Si  $x = 0$  ou  $x = 1$ ,  $(f_n(x))$  est la suite constante égale à 0. Si  $x \in ]0, 1[$ , alors  $(f_n(x))$  tend vers 0 par comparaison d'une suite polynomiale et d'une suite géométrique de raison dans l'intervalle  $]0, 1[$ . Remarquons que  $\ln x$  ne joue aucun rôle dans cette étude.

2. Si  $x = 0$  ou  $x = 1$ ,  $(f_n(x))$  est la suite constante égale à 0.

3. Si  $x \in ]0, 1[$ , alors  $(f_n(x))$  tend vers 0 par comparaison d'une suite polynomiale et d'une suite géométrique de raison dans l'intervalle  $]0, 1[$ . Remarquons que  $\ln x$  ne joue aucun rôle dans cette étude.

4. On a pour tout  $x \in ]0, 1[$ ,

$$g'(x) = -nx^{n-1}(n \ln x + 1).$$

La dérivée s'annule en  $e^{-1/n}$  et la fonction  $g$  est croissante sur  $]0, e^{-1/n}[$  puis décroissante sur  $]e^{-1/n}, 1[$ .

5. On déduit de la question précédente que

$$\sup_{x \in [0,1]} |f(x) - f_n(x)| = |(f - f_n)(e^{-1/n})| = e^{-1}.$$

La convergence n'est donc pas uniforme sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

6. La suite  $(e^{-1/n})$  tend vers 1 lorsque  $n$  tend vers l'infini. Il existe donc  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$ , on a  $e^{-1/n} \geq a$ . Ainsi, pour  $n \geq n_0$ , la fonction  $g$  est monotone croissante sur  $[0, a]$ . Puisqu'elle s'annule en 0, on en déduit que pour tout  $x \in [0, a]$  et tout  $n \geq n_0$ , on a

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |f(a) - f_n(a)| = na^n |\ln a|.$$

Le membre de droite de cette dernière inégalité tend vers 0. On en déduit que  $(f_n)$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $[0, a]$ .

### Correction de l'exercice 4 ▲

1. L'inégalité  $|f_n(x)| \leq e^{-nx}$  prouve que  $f_n$  converge simplement vers la fonction nulle. Posons  $g(x) = e^{-x} \sin(2x)$ . On a  $f_n(x) = g(nx)$ . De plus, lorsque  $x$  parcourt  $\mathbb{R}_+$ ,  $nx$  parcourt  $\mathbb{R}_+$  et donc

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f_n(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |g(x)| > 0.$$

La suite  $(\|f_n\|_\infty)$  est une constante strictement positive, elle ne peut pas tendre vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$  : la convergence n'est pas uniforme sur  $\mathbb{R}^+$ . En revanche, si  $a > 0$  et  $x \geq a$ , on a :

$$|f_n(x)| \leq e^{-na},$$

ce qui prouve la convergence uniforme sur  $[a, +\infty[$ .

2. Si  $x \neq 0$ ,  $(f_n(x))$  tend vers 0 (c'est une suite géométrique de raison dans l'intervalle  $]0, 1[$ ), et si  $x = 0$ , alors la suite  $(f_n(x))$  est constante égale à 1. La suite de fonctions  $(f_n)$  converge donc simplement vers la fonction  $f$  égale à 1 en 0 et égale à 0 partout ailleurs. La convergence ne peut pas être uniforme sur  $\mathbb{R}$  car chaque fonction  $f_n$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et la fonction limite ne l'est pas en 0. En revanche, la convergence est uniforme sur les intervalles du type  $[a, +\infty[$  avec  $a > 0$ , puisque pour tout  $x \geq a$ , on a

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{(1+x^2)^n} \leq \frac{1}{(1+a^2)^n}$$

et le dernier terme de cette inégalité (qui ne dépend plus de  $x \in [a, +\infty[$ ), tend vers 0.

### Correction de l'exercice 5 ▲

Pour  $x = 1$ , on a  $f_n(1) = 0$  quelque soit  $n$ . Pour  $x \in [0, 1[$ , par croissance comparée des fonctions puissances et exponentielles, on sait que  $f_n(x)$  tend vers 0. Donc la suite  $(f_n)$  converge simplement vers 0 sur  $[0, 1]$ . Pour étudier la convergence uniforme, on doit étudier la suite  $\|f_n - 0\|_\infty$ . Pour cela, on dérive  $f_n$  :

$$f'_n(x) = n^{a+1}x^{n-1}(1-x) - n^a x^n = n^a x^{n-1} (n(1-x) - x).$$

Ainsi,  $f'_n$  s'annule en 0 et en  $x_n = \frac{n}{n+1}$  qui sont tous les deux des points de  $[0, 1]$ . Puisque  $f_n(0) = f_n(1) = 0$ , on trouve que

$$\begin{aligned} \|f_n\|_\infty &= |f_n(x_n)| \\ &= n^a \left( \frac{n}{n+1} \right)^n \left( 1 - \frac{n}{n+1} \right) \\ &= \frac{n^a}{n+1} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n. \end{aligned}$$

Or, en passant par l'exponentielle et le logarithme, on prouve facilement que

$$\left( \frac{n}{n+1} \right)^n \rightarrow e^{-1}.$$

On en déduit que

$$\|f_n\|_\infty \sim_{+\infty} e^{-1} n^{a-1}.$$

Ainsi,  $(f_n)$  converge uniformément vers 0 sur  $[0, 1]$  (ie  $(\|f_n\|_\infty)$  tend vers 0) si et seulement si  $a < 1$ .

---

### Correction de l'exercice 6 ▲

Les fonctions  $f_n$  sont paires, on peut restreindre l'étude à  $[0, +\infty[$ .  $f_n(0) = n$  et donc  $(f_n(0))$  diverge. Pour  $x > 0$ , la comparaison des fonctions puissance et exponentielle fait que  $(ne^{-n^2x^2})$  tend vers 0. Donc la suite  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction nulle sur  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Passons à l'étude de la convergence uniforme. Sur  $[a, +\infty[$ , les fonctions  $(f_n)$  sont positives et décroissantes. On a donc

$$\sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x) - 0| \leq f_n(a)$$

et comme  $(f_n(a))$  tend vers 0, il en est de même de  $(\sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x) - 0|)_n$ . La convergence est donc uniforme sur  $[a, +\infty[$ . Sur  $]0, +\infty[$ , on a

$$\sup_{x \in ]0, +\infty[} |f_n(x)| \geq f_n(1/n) = ne^{-1} \rightarrow +\infty.$$

La convergence n'est donc pas uniforme sur  $]0, +\infty[$ .

---

### Correction de l'exercice 7 ▲

On peut écrire  $f_n = \sqrt{g_n}$  avec  $g_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}$ . La fonction  $\sqrt{\cdot}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$  et la fonction  $x \mapsto x^2 + \frac{1}{n}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $]0, +\infty[$ . On en déduit par composition que chaque  $f_n$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ . Il est ensuite clair que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la suite  $(f_n(x))$  converge vers  $\sqrt{x^2} = |x|$ . On a donc convergence simple de  $(f_n)$  sur  $\mathbb{R}$  vers la fonction valeur absolue, qui n'est pas dérivable en 0. Reste à prouver la convergence uniforme. Pour cela, on va utiliser la quantité conjuguée. En effet, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$0 \leq \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} = \frac{x^2 + \frac{1}{n} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}} \leq \frac{1/n}{1/\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ceci prouve bien la convergence uniforme de  $(f_n)$  vers la fonction valeur absolue sur  $\mathbb{R}$ , qui bien évidemment n'est pas  $\mathcal{C}^1$ .

---

### Correction de l'exercice 8 ▲

1. Si  $x = 0$ , la suite  $(f_n(x))$  est constante égale à 0. Si  $x > 0$ , alors il existe un entier  $N$  tel que, pour tout  $n \geq N$ ,  $\frac{1}{n} < x$ . On en déduit que pour tout  $n \geq N$ ,  $f_n(x) = 0$ . Dans ce cas, la suite  $(f_n(x))$  est stationnaire et stationne à 0. On en déduit que la suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction nulle sur  $[0, 1]$ .

2. On a

$$\int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^{1/n} n^2 x(1 - nx) dx = \int_0^1 u(1 - u) du = \frac{1}{6}.$$

Il ne peut donc pas y avoir convergence uniforme de  $(f_n)$  vers la fonction nulle sur  $[0, 1]$ , sinon on aurait

$$\frac{1}{6} = \int_0^1 f_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt = \int_0^1 0 dt = 0.$$

3. On reprend la méthode de la première question en la précisant. Puisque  $a > 0$ , il existe un entier  $N$  tel que, pour tout  $n \geq N$ ,  $\frac{1}{n} < a$ . Mais alors, pour tout  $n \geq N$  et tout  $x \in [a, 1]$ ,  $f_n(x) = 0$ . Autrement dit, pour  $n \geq N$ ,  $\sup_{x \in [a, 1]} |f_n(x)| = 0$ . Ceci prouve la convergence uniforme de la suite  $(f_n)$  vers  $f$  sur  $[a, 1]$ .

---

### Correction de l'exercice 9 ▲

1. Puisque

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n\sqrt{x}},$$

il est clair que la suite  $(f_n)$  converge simplement vers 0 sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Pour étudier la convergence uniforme, remarquons que  $f_n$  s'écrit :

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{nx}} = \frac{1}{\sqrt{n}} g(nx),$$

où  $g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ ,  $g(0) = 0$ . Prouvons que  $g$  est bornée : d'abord,  $g$  est continue sur  $[1, +\infty[$ , et elle admet une limite finie ( $=0$ ) en  $+\infty$  :  $g$  est bornée sur  $[1, +\infty[$ . D'autre part, puisque  $\sin x \sim x$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ , et  $g$  est continue sur  $[0, 1]$  : elle y est donc bornée, et finalement  $g$  est bornée sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Maintenant,

$$\|f_n\|_\infty = \left\| \frac{1}{\sqrt{n}} g \right\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{n}} \|g\|_\infty \rightarrow 0,$$

ce qui prouve la convergence uniforme vers 0 sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

2. Pour  $x \neq \frac{\pi}{2} \in [\pi]$ , la suite  $(f_n(x))$  converge vers 0 car c'est une suite géométrique de raison dans l'intervalle  $] -1, 1[$ . Si  $x = \frac{\pi}{2} \in [\pi]$ , alors la suite  $(f_n(x))$  est constante égale à 0. La suite  $(f_n)$  converge donc simplement sur  $\mathbb{R}$  vers la fonction nulle. Pour étudier  $\|f_n\|_\infty$ , il suffit par périodicité et parité de se restreindre à l'intervalle  $[0, \pi]$ . Mais alors, pour tout  $x \in [0, \pi]$ , on a

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= n \sin^{n-1}(x) \cos^2(x) - \sin^{n+1}(x) \\ &= \sin^{n-1}(x) (n \cos^2(x) - \sin^2(x)) \\ &= \sin^{n-1}(x) ((n+1) \cos^2(x) - 1). \end{aligned}$$

$f'_n$  s'annule sur  $[0, \pi]$  en  $x_0 \in [0, \pi/2]$  et  $x_1 \in [\pi/2, \pi]$  tel que  $\cos^2(x_0) = 1/(n+1)$  et  $\cos^2(x_1) = 1/(n+1)$ . Ainsi,  $f_n$  est croissante sur  $[0, x_0]$ , décroissante sur  $[x_0, x_1]$  et croissante sur  $[x_1, \pi]$ . Puisqu'elle s'annule en 0 et en  $\pi$ , on en déduit que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| \leq \max(|f_n(x_0)|, |f_n(x_1)|) \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

(on a simplement majoré le sinus par 1). Le membre de droite de cette dernière inégalité tendant vers 0, on en déduit que  $(f_n)$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $\mathbb{R}$ .

3. On a  $\frac{(n-1)x}{n} \rightarrow x$  et donc, par théorème de composition des limites,  $f_n(x) \rightarrow e^x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . La suite de fonctions  $(f_n)$  converge donc simplement vers  $e^x$  sur  $\mathbb{R}$ . La convergence n'est pas uniforme sur  $\mathbb{R}$ . En effet, on a

$$\begin{aligned} \exp(n) - f_n(n) &= \exp(n) - \exp(n-1) \\ &= \exp(n) (1 - \exp(-1)) \end{aligned}$$

et ceci tend vers  $+\infty$ . En revanche, on a convergence uniforme sur tout intervalle de la forme  $] -\infty, b]$ . En effet, fixons  $b \in \mathbb{R}$  qu'on peut supposer positif, et prenons  $x \in ] -\infty, b]$ . Alors, d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$\begin{aligned} \left| \exp\left(\frac{(n-1)x}{n}\right) - \exp(x) \right| &\leq \left| \frac{(n-1)x}{n} - x \right| \sup_{t \in I_x} |\exp(t)| \\ &\leq \frac{|x|}{n} \sup_{t \in I_x} |\exp(t)| \end{aligned}$$

où  $I_x$  est l'intervalle  $\left[\frac{(n-1)x}{n}, x\right]$  si  $x > 0$ , l'intervalle  $\left[x, \frac{(n-1)x}{n}\right]$  si  $x \leq 0$ . Mais, si  $x \in [0, b]$ , alors

$$\frac{|x|}{n} \sup_{t \in I_x} |\exp(t)| \leq \frac{b \exp b}{n}.$$

Si  $x < 0$ , alors

$$\frac{|x|}{n} \sup_{t \in I_x} |\exp(t)| \leq \frac{|x| \exp(x/2)}{n}.$$

Or, il est très facile de vérifier que la fonction  $x \mapsto |x| \exp(x/2)$  est majorée sur  $] -\infty, 0]$ . C'est en effet une fonction continue qui tend vers 0 en  $-\infty$ . Ainsi, il existe  $M$  tel que, pour tout  $x < 0$ ,

$$|x| \exp(x/2) \leq M.$$

On en déduit, pour tout  $x \in ] -\infty, b]$ ,

$$\left| \exp\left(\frac{(n-1)x}{n}\right) - \exp(x) \right| \leq \frac{\max(be^b, M)}{n},$$

ce qui prouve la convergence uniforme sur  $] -\infty, b]$ .

### Correction de l'exercice 10 ▲

On commence par remarquer que  $f_n(0) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et que, pour  $x \neq 0$ , on a

$$f_n(x) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{n^2 x^2} = \frac{1}{n^2 x}.$$

Ainsi,  $f_n(x) \rightarrow 0$  pour tout  $x \in [0, 1]$  et  $(f_n)$  converge simplement sur  $[0, 1]$  vers la fonction nulle, que nous noterons  $f$ . Étudions maintenant la convergence uniforme. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est dérivable sur  $[0, 1]$  et on a

$$f'_n(x) = \frac{1 - n^2 x^2}{(1 + n^2 x^2)^2}.$$

On en déduit que  $f'_n \geq 0$  sur  $[0, 1/n]$  et que  $f'_n \leq 0$  sur  $[1/n, 1]$ . Puisque  $f_n(0) = 0$  et que  $f_n(1) = \frac{1}{1+n^2}$ , la fonction  $f_n$  est positive sur  $[0, 1]$  et atteint son maximum en  $1/n$  (unique valeur où la dérivée s'annule). On a donc

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = f_n(1/n) = \frac{1}{2n} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On a donc bien démontré la convergence uniforme sur  $[0, 1]$  de  $(f_n)$  vers  $f$  qui est dérivable avec  $f' = 0$ . Étudions désormais la suite de fonctions dérivées. On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f'_n(0) = 1$  et, pour  $x \in ]0, 1]$ ,  $f'_n(x) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n^2 x^2}{n^4 x^4}$ . Ainsi,  $(f'_n)$  converge simplement sur  $[0, 1]$  vers la fonction  $g$  définie par  $g(0) = 1$  et  $g(x) = 0$  pour  $x \in ]0, 1]$ . Bien évidemment,  $f' \neq g$ . L'intérêt de cet exercice est donc de mettre en valeur l'importance des hypothèses dans le théorème de dérivabilité de la limite.

### Correction de l'exercice 11 ▲

Soit  $x \in +$ . Il existe un  $n_0$  tel que pour  $n \geq n_0$ ,  $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right)$ . Maintenant,

$$\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) = -\frac{x}{n} + o\left(\frac{x}{n}\right).$$

On a donc

$$f_n(x) = e^{-x+o(x)},$$

ce qui prouve que  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction  $f(x) = e^{-x}$ . On pose alors, pour  $n \geq 2$ ,  $\varphi_n(x) = f_n(x) - f(x)$ . On cherche à majorer  $\sup_{x \geq 0} |\varphi_n(x)|$ . Pour cela, on peut essayer d'étudier la fonction  $\varphi_n$ . On peut remarquer qu'elle est dérivable sur  $[0, n]$  et que sa dérivée vaut, pour  $x \in [0, n]$ ,

$$\varphi'_n(x) = -\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} + e^{-x}.$$

Malheureusement, le signe de cette fonction n'est pas facile à étudier (en particulier, les éventuelles solutions de  $\varphi'_n(x) = 0$  ne s'expriment pas à l'aide des fonctions usuelles). Voici comment s'en sortir. Sur  $[0, n]$ , la borne supérieure de  $|\varphi_n(x)|$  est atteinte ou à une borne de l'intervalle, ou en un point où la dérivée s'annule. On note  $x_0 \in \mathbb{R}_+$  un point où la dérivée s'annule (s'il en existe). Essayons de majorer  $|\varphi_n(x_0)|$  :

$$\begin{aligned} \varphi_n(x_0) &= \left(1 - \frac{x_0}{n}\right)^n - e^{-x_0} \\ &= \left(1 - \frac{x_0}{n}\right) \left(1 - \frac{x_0}{n}\right)^{n-1} - e^{-x_0} \\ &= -e^{-x_0} \frac{x_0}{n}, \end{aligned}$$

la dernière égalité venant du fait que  $\varphi'_n(x_0) = 0$ . Posons  $g_n(x) = e^{-x} \frac{x}{n}$ . On a donc prouvé que :

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0, n]} |\varphi_n(x)| &\leq \max \left( |\varphi_n(0)|, |\varphi_n(n)|, \max_{x \in [0, n]} |g_n(x)| \right) \\ &\leq \max \left( e^{-n}, \max_{x \in [0, n]} |g_n(x)| \right). \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour  $x \in [n, +\infty[$ , on a clairement  $|\varphi_n(x)| \leq |\varphi_n(n)| = e^{-n}$ . Ainsi, on a obtenu

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |\varphi_n(x)| \leq \max \left( e^{-n}, \max_{x \in [0, n]} |g_n(x)| \right).$$

On s'est donc ramené à l'étude d'une fonction plus facile à manipuler. En effet,

$$g'_n(x) = 0 \iff \frac{e^{-x}}{n} (1-x) = 0 \iff x = 1.$$

Ceci prouve que

$$\sup_{x \in [0, n]} |g_n(x)| \leq \max \left( e^{-n}, \frac{e^{-1}}{n} \right).$$

Bref, on a :

$$\|\varphi_n\|_\infty \leq \frac{1}{en}.$$

La suite  $(f_n)$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}_+$  vers  $f$ .

---

### Correction de l'exercice 12 ▲

1. Fixons  $x \in I$  et posons, pour  $t \in I$ ,  $\phi(t) = t + \frac{1}{2}(x - t^2)$ , de sorte que  $f_{n+1}(x) = \phi(f_n(x))$ . Posons, pour simplifier les notations,  $u_n = f_n(x)$ . On doit étudier la suite récurrente  $u_{n+1} = \phi(u_n)$ , avec  $u_0 = 0$ . Remarquons que  $\phi'(t) = 1 - t \geq 0$  et donc  $\phi$  est croissante sur  $I$ . On a de plus  $\phi(I) = [\phi(0), \phi(1)] = [x/2, (x+1)/2]$  et donc  $\phi(I) \subset I$ . Ainsi,  $(u_n)$  est à valeurs dans  $I$ . De plus,  $u_1 \geq u_0$  et donc la suite  $(u_n)$  est croissante. Ainsi, la suite est croissante, majorée donc elle converge. Sa limite  $l$  vérifie  $\phi(l) = l$  et  $l \in I$ , donc  $l \geq 0$ , ce qui implique immédiatement  $l = \sqrt{x}$ .

2. D'après la question précédente, on sait que, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in I$ , on a  $f_n(x) \leq \sqrt{x}$  (la suite est croissante). On en déduit que

$$\begin{aligned} 0 \leq \sqrt{x} - f_{n+1}(x) &= \sqrt{x} - f_n(x) - (x - f_n(x)^2)/2 \\ &= (\sqrt{x} - f_n(x)) (1 - (\sqrt{x} + f_n(x))/2) \\ &\leq (\sqrt{x} - f_n(x)) \left( 1 - \frac{\sqrt{x}}{2} \right) \end{aligned}$$

Par récurrence immédiate, on obtient

$$0 \leq \sqrt{x} - f_n(x) \leq (\sqrt{x} - f_0(x)) \left( 1 - \frac{\sqrt{x}}{2} \right)^n,$$

ce qui est le résultat demandé.

3. Si on étudie la fonction  $g : t \mapsto t(1 - t/2)^n$  sur  $[0, 1]$ , on vérifie qu'elle atteint son maximum en  $t_n = 2/(n+1)$ . On en déduit que, pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$0 \leq \sqrt{x} - f_n(x) \leq g(\sqrt{x}) \leq g(t_n) \leq \frac{2}{n+1}.$$

On a majoré  $|\sqrt{x} - f_n(x)|$  par une quantité indépendante de  $x$  et qui tend vers 0. Ceci prouve la convergence uniforme de la suite sur  $[0, 1]$ .

---

---

**Correction de l'exercice 13 ▲**

Appliquons la définition de la convergence uniforme pour  $\varepsilon = 1$ . Il existe un entier  $n_0$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$|f(x) - f_n(x)| \leq 1.$$

De plus,  $f_{n_0}$  est borné. Il existe donc  $M > 0$  tel que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$|f_{n_0}(x)| \leq M.$$

Par l'inégalité triangulaire, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x)| \leq M + 1.$$

Ainsi,  $f$  est bornée. Le résultat devient faux si la convergence n'est plus uniforme. Prenons par exemple  $f(x) = x$ , et  $f_n(x) = x$  si  $|x| \leq n$ ,  $f_n(x) = 0$  ailleurs. Chaque  $(f_n)$  est bornée, et la suite  $(f_n)$  converge simplement vers  $f$  sur  $\mathbb{R}$ . Cependant,  $f$  n'est pas bornée.

---

---

**Correction de l'exercice 14 ▲**

Prenons  $x \in [0, 1]$ . Puisque  $f_n$  est décroissante,

$$f_n(1) \leq f_n(x) \leq f_n(0).$$

Il vient

$$\|f_n\|_\infty \leq \max(|f_n(0)|, |f_n(1)|).$$

Le terme de droite tend vers 0, et donc  $(f_n)$  converge uniformément sur  $[0, 1]$  vers la fonction nulle.

---

---

**Correction de l'exercice 15 ▲**

Pour tout  $x \in I$ , on peut écrire

$$f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x) = (f_n(x) - f(x))g_n(x) + f(x)(g_n(x) - g(x)).$$

Or, puisque  $g$  est bornée et que  $(g_n)$  converge uniformément vers  $g$ , on sait qu'il existe un entier  $N$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,

$$|g_n(x)| \leq |g(x)| + 1 \leq \|g\|_\infty + 1.$$

on en déduit que pour  $n \geq N$ ,

$$\|f_n g_n - f g\|_\infty \leq (\|g\|_\infty + 1)\|f_n - f\|_\infty + \|f\|_\infty \|g_n - g\|_\infty.$$

Ceci prouve la convergence uniforme de  $(f_n g_n)$  vers  $f g$ .

---

---

**Correction de l'exercice 16 ▲**

Soit donc  $(f_n)$  une suite de fonctions uniformément continue sur  $I$ , qui converge uniformément sur  $I$  vers  $f$ . On doit prouver que  $f$  est elle-même uniformément continue sur  $I$ . On fixe  $\varepsilon > 0$ . Il existe un entier  $N$  tel que, pour tout  $x \in I$ ,

$$|f(x) - f_N(x)| \leq \varepsilon.$$

Or, la fonction  $f_N$  est elle-même uniformément continue sur  $I$ . Il existe donc  $\alpha > 0$  tel que, pour tout  $x, y$  dans  $I$ ,

$$|x - y| \leq \alpha \implies |f_N(x) - f_N(y)| \leq \varepsilon.$$

On conclut par l'inégalité triangulaire car, si  $|x - y| \leq \alpha$ ,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| \leq 3\varepsilon.$$

---

**Correction de l'exercice 17 ▲**

D'après la formule de Taylor-Lagrange, on a, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\left| f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) - \frac{1}{n}f'(x) \right| \leq \frac{M}{n^2},$$

où  $M = \|f''\|_\infty/2$ . On en déduit que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$|f_n(x) - f'(x)| \leq \frac{M}{n}.$$

Ceci prouve la convergence uniforme de  $(f_n)$  vers  $f'$  sur  $\mathbb{R}$ .

---

**Correction de l'exercice 18 ▲**

1. Par convergence uniforme de  $(P_n)$  vers  $f$  sur  $\mathbb{R}$ , il existe un entier  $N$  tel que pour tout  $n \geq N$ , on a  $\|P_n - f\|_\infty \leq 1/2$ . D'après l'inégalité triangulaire, pour tout  $n \geq N$ , on en déduit

$$\|P_n - P_N\|_\infty \leq \|P_n - f\|_\infty + \|f - P_N\|_\infty \leq 1.$$

2.  $P_n - P_N$  est un polynôme borné sur  $\mathbb{R}$ , il s'agit donc d'un polynôme constant.

3. On peut donc écrire, pour tout  $n \geq N$ ,  $P_n = P_N + C_n$ . On a donc, par exemple pour  $x = 0$ ,

$$P_n(0) = P_N(0) + C_n \rightarrow f(0)$$

et donc  $(C_n)$  est une suite convergente. Notons  $\lambda$  sa limite. Ainsi,  $(P_n)$  converge simplement (et en fait aussi uniformément) vers  $P_N + \lambda$ . Par unicité de la limite,  $f = P_N + \lambda$  est une fonction polynomiale.

---

**Correction de l'exercice 19 ▲**

1. On commence par remarquer, que par passage à la limite dans les inégalités,  $f$  est elle-même  $M$ -lipschitzienne. Fixons  $\varepsilon > 0$ . On fixe une subdivision de  $[\alpha, \beta]$  de la forme  $\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_p = \beta$  telle que  $\alpha_{i+1} - \alpha_i < \frac{\varepsilon}{M}$ . Chaque suite  $(f_n(\alpha_i))$  converge vers  $f(\alpha_i)$ . Puisqu'il y en a un nombre fini, on en déduit qu'il existe un rang  $n_0$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$  et tout  $i \in \{1, \dots, p\}$ , on a  $|f_n(\alpha_i) - f(\alpha_i)| \leq \varepsilon$ . Prenons maintenant  $x \in [\alpha, \beta]$ . Il existe un  $i$  tel que  $x \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ . Alors on a

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq |f_n(x) - f_n(\alpha_i)| + |f_n(\alpha_i) - f(\alpha_i)| + |f(\alpha_i) - f(x)| \\ &\leq M|x - \alpha_i| + \varepsilon + M|x - \alpha_i| \\ &\leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci prouve la convergence uniforme de  $(f_n)$  vers  $f$  sur  $[\alpha, \beta]$ .

2. On va se ramener à la question précédente. Pour cela, fixons  $[\alpha, \beta] \subset ]a, b[$ . Soit également  $a < \alpha' < \alpha$  et  $\beta < \beta' < b$ . Alors, puisque  $f_n$  est convexe, on a pour tout  $(x, y) \in [\alpha, \beta]$ ,  $x \neq y$ , :

$$\frac{f_n(\alpha) - f_n(\alpha')}{\alpha - \alpha'} \leq \frac{f_n(x) - f_n(y)}{x - y} \leq \frac{f_n(\beta') - f_n(\beta)}{\beta' - \beta}.$$

Les membres de gauche et de droite sont des suites qui admettent une limite lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Ce sont donc des suites bornées. On en déduit l'existence de  $M > 0$  tel que, pour tout  $x, y \in [\alpha, \beta]$ ,  $x \neq y$ , pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\left| \frac{f_n(x) - f_n(y)}{x - y} \right| \leq M.$$

Autrement dit, les fonctions  $(f_n)$  sont  $M$ -lipschitziennes sur  $[\alpha, \beta]$ . Il suffit maintenant d'appliquer le résultat de la première question.

---



---

**Correction de l'exercice 20 ▲**

1. On va démontrer cette inégalité par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 0$ , on remarque que  $u_1(x) = 1 + \int_0^x 1 dt = x + 1$ . Ainsi,

$$|u_1(x) - u_0(x)| \leq x.$$

Supposons maintenant l'inégalité démontrée au rang  $n$  (pour tout  $x \in [0, 1]$ ) et démontrons la au rang  $n + 1$ . On écrit

$$\begin{aligned} |u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x)| &\leq \int_0^x |u_{n+1}(t - t^2) - u_n(t - t^2)| dt \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!} \int_0^x (t - t^2)^{n+1} dt \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!} \int_0^x t^{n+1} dt \\ &\leq \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}. \end{aligned}$$

2. La série  $\sum_{n \geq 1} (u_{n+1} - u_n)(x)$  est convergente car absolument convergente, puisque la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$  est convergente. Ceci prouve (argument des séries télescopiques) que la suite  $(u_n(x))$  est convergente.

3. Remarquons d'abord que l'inégalité obtenue à la première question assure que pour tout  $n \geq 1$ , on a  $u_n(0) = 1$  et donc  $u(0) = 1$ . Ainsi,  $u$  est non-nulle. De plus, si  $x \in [0, 1]$  et  $n \geq 1$ , on a

$$|u(x) - u_n(x)| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} |u_{k+1}(x) - u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}.$$

Le dernier terme de cette inégalité est le reste d'une série convergente. Il tend donc vers 0. Et donc la suite de fonctions  $(u_n)$  est uniformément convergente.

4. On peut permuter la limite et l'intégrale dans la définition de  $u_n$  par convergence uniforme et il vient

$$u(x) = 1 + \int_0^x u(t - t^2) dt.$$

Par ailleurs,  $u$  est continue comme limite uniforme d'une suite de fonctions continues. L'égalité précédente, modulo le théorème fondamental du calcul intégral, assure que  $u$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et que, pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$u'(x) = u(x - x^2).$$

---

**Correction de l'exercice 21 ▲**

1. Il est très facile de prouver la convergence simple sur  $\mathbb{R}_+$ . Pour  $x = 0$ , on a en effet  $u_n(0) = 0$ , qui est bien le terme général d'une série convergente. Pour  $x > 0$ , on a  $u_n(x) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{n^2}$ , qui est aussi le terme général d'une série convergente.

2. On va prouver la convergence normale sur  $[0, A]$ , qui implique la convergence uniforme sur cet intervalle. On a en effet, pour tout  $x \in [0, A]$ ,

$$|u_n(x)| \leq \frac{A}{n^2},$$

terme général d'une série convergente.

3. Il suffit d'écrire que, pour  $n + 1 \leq k \leq 2n$ , on a  $n^2 + k^2 \leq 5n^2$ , et donc  $\frac{n}{n^2 + k^2} \geq \frac{1}{5n}$ . On obtient finalement

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{n^2 + k^2} \geq n \times \frac{1}{5n} = \frac{1}{5}.$$

4. Il est plus difficile de prouver la non-convergence uniforme. On peut procéder de la façon suivante. Supposons que la convergence est uniforme. Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $N$  tel que, pour tout  $n \geq N$ , et tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , on ait

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq \varepsilon.$$

Mais alors, d'après l'inégalité triangulaire, pour tout  $n \geq N$ , on a

$$\left| \sum_{k=n+1}^{2n} u_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) - \sum_{k=2n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| + \left| \sum_{k=2n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq 2\varepsilon.$$

En particulier, pour  $n = N$  et  $x = N$ , on a la double inégalité

$$\frac{1}{5} \leq \left| \sum_{k=N+1}^{2N} u_k(N) \right| \leq 2\varepsilon.$$

Bien sûr, si on a choisi  $2\varepsilon < 1/5$ , c'est impossible.

### Correction de l'exercice 22 ▲

1. Pour  $x \in ]0, 1[$ ,  $u_n(x) > 0$  et

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \rightarrow x \in ]0, 1[.$$

Par le critère de d'Alembert, la série de terme général  $u_n(x)$  est convergente. Si  $x = 1$ , alors  $u_n(x) = 0$  et la convergence est triviale. De plus, on a clairement  $S(1) = 0$ . La convergence dans le cas  $x = 0$  est elle aussi triviale.

2. Pour étudier la convergence normale, on doit étudier la série  $\sum_n \|u_n\|_\infty$ . Pour calculer  $\|u_n\|_\infty$ , on dérive  $u_n$  :

$$u'_n(x) = n^{a+1}x^{n-1}(1-x) - n^a x^n = n^a x^{n-1}(n(1-x) - x).$$

Ainsi,  $u'_n$  s'annule en 0 et en  $x_n = \frac{n}{n+1}$  qui sont tous les deux des points de  $[0, 1]$ . Puisque  $u_n(0) = u_n(1) = 0$ , on trouve que

$$\begin{aligned} \|u_n\|_\infty &= |u_n(x_n)| \\ &= n^a \left( \frac{n}{n+1} \right)^n \left( 1 - \frac{n}{n+1} \right) \\ &= \frac{n^a}{n+1} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n. \end{aligned}$$

Or, en passant par l'exponentielle et le logarithme, on prouve facilement que

$$\left( \frac{n}{n+1} \right)^n \rightarrow e^{-1}.$$

On en déduit que

$$\|u_n\|_\infty \sim_{+\infty} e^{-1} n^{a-1}.$$

Ainsi, il y a convergence normale si et seulement si  $a < 0$ .

3. Si  $a = 0$  et  $x \in [0, 1[$ , on peut encore écrire

$$S(x) = \sum_{n \geq 1} x^n - \sum_{n \geq 1} x^{n+1} = x.$$

Ainsi,  $S(x) = x$  si  $x \in [0, 1[$  et  $S(1) = 0$ . La convergence ne peut pas être uniforme sur  $[0, 1]$ . En effet, si cela était le cas, alors puisque chaque terme  $x \mapsto u_n(x)$  est continue sur  $[0, 1]$ , ce serait également le cas de la somme, ce qui n'est pas le cas ici.

4. Nous allons utiliser la question précédente, en remarquant que, pour  $x \in [0, 1[$ ,  $a > 0$  et  $n \geq 1$ ,

$$n^a x^n (1-x) \geq x^n (1-x)$$

ce qui implique  $S(x) \geq x$  si  $x \in [0, 1[$ . Une nouvelle fois, ceci interdit la convergence uniforme puisque l'inégalité précédente implique que  $S$  n'est pas continue en 1.

---

**Correction de l'exercice 23 ▲**

---

1. Soit  $x \geq 0$  fixé. Alors  $n^2 u_n(x) = x^2 e^{-x\sqrt{n}+3\ln n}$  tend vers 0. Par comparaison à une série de Riemann convergente, la série  $\sum_n u_n(x)$  est convergente.

2. On va calculer  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |u_n(x)|$ . On remarque d'abord que  $u_n$  est une fonction positive. De plus, elle est dérivable et sa dérivée vaut

$$u'_n(x) = n(2x - x^2\sqrt{n})e^{-x\sqrt{n}} = nx(2 - x\sqrt{n})e^{-x\sqrt{n}}.$$

On en déduit que  $u_n$  est croissante sur l'intervalle  $[0, 2/\sqrt{n}]$  et décroissante sur l'intervalle  $[2/\sqrt{n}, +\infty[$ . On a donc

$$\|u_n\|_\infty = u_n(2/\sqrt{n}) = 4e^{-2}.$$

C'est le terme général d'une série (grossièrement) divergente, et donc la convergence n'est pas normale sur  $\mathbb{R}_+$ .

3. Pour  $n \geq \frac{4}{a^2}$ , on a  $a \geq 2/\sqrt{n}$  et donc la fonction  $u_n$  est décroissante sur  $[a, +\infty[$ . On en déduit que, pour tout  $x \geq a$  et tout  $n \geq \frac{4}{a^2}$ , on a

$$|u_n(x)| \leq u_n(a).$$

Le membre de droite est le terme général d'une série numérique (il ne dépend plus de  $x$ ) convergente : ceci prouve la convergence normale de la série  $\sum_n u_n$  sur  $[a, +\infty[$ . Remarquons que le fait que l'inégalité ne soit vraie qu'à partir d'un certain rang (qui est indépendant de  $x \in [a, +\infty[$ ) ne change rien à la convergence normale.

4. Notons  $R_n$  le reste d'ordre  $n$  de la série. Puisque  $u_k \geq 0$  pour tout  $k$ , on a

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \geq u_{n+1}(x).$$

D'après le résultat de la question 2.,

$$\|R_n\|_\infty \geq \|u_{n+1}\|_\infty = 4e^{-2}.$$

Ceci ne tend pas vers 0 et donc la convergence n'est pas uniforme sur  $\mathbb{R}_+$ .

---

**Correction de l'exercice 24 ▲**

---

1. On va appliquer le critère des séries alternées. Il est clair que  $|u_n(x)|$  tend vers 0, reste à voir que, pour  $x \geq 0$ , on a  $|u_{n+1}(x)| \leq |u_n(x)|$ . Mais,

$$\frac{x}{(n+1)(1+x)} \leq \frac{x}{n(1+x)},$$

et on conclut par croissance de la fonction logarithme.

2. Le critère des séries alternées nous donne même une majoration du reste de la série. On a en effet

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k \geq n+1} u_k(x) \right| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \frac{x}{(n+1)(1+x)} \leq \frac{1}{n+1}$$

où on a utilisé que  $\ln(1+t) \leq t$  pour  $t > -1$ . On a majoré le reste pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$  par une quantité qui ne dépend plus de  $x$  et qui tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . C'est bien que la série converge uniformément sur  $\mathbb{R}_+$ .

3. On n'a même pas convergence absolue de la série à  $x > 0$  fixé. Par exemple,

$$|u_n(1)| = \ln \left( 1 + \frac{1}{2n} \right) \sim_{+\infty} \frac{1}{2n}.$$

La série  $\sum_n |u_n(1)|$  diverge. A fortiori, il en est de même de la série  $\sum_n \|u_n\|_\infty$ .

---

**Correction de l'exercice 25 ▲**

---

1. Pour  $x = 0$ , la série converge car  $u_n(0) = 0$ . Pour  $x > 0$  fixé, on a

$$u_n(x) = o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et donc la série  $\sum_n u_n(x)$  converge.

2. Une étude rapide de  $u_n$  montre qu'elle atteint son maximum en  $1/n$ . On a donc

$$\sum_{n \geq 2} \|u_n\|_\infty = \sum_{n \geq 2} u_n(1/n) = \sum_{n \geq 2} \frac{e^{-1}}{n \ln n}.$$

Il est bien connu que cette dernière série est divergente, et donc la convergence n'est pas normale.

3. On va utiliser la somme d'une série géométrique. En effet, pour  $x > 0$ , on a  $e^{-kx} = (e^{-x})^k$  et  $0 < e^{-x} < 1$ . De plus, pour  $k \geq n+1$ , on a

$$0 \leq u_k(x) \leq \frac{x(e^{-x})^k}{\ln(n+1)}.$$

On en déduit que

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{x}{\ln(n+1)} \times \frac{e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}} \leq \frac{1}{\ln(n+1)} \times \frac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}}.$$

Or, il est facile de vérifier que la fonction  $x \mapsto \frac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}}$  est bornée sur  $\mathbb{R}_+$ . On peut étudier cette fonction ou remarquer que

Elle se prolonge par continuité en 0 : en effet

$$\frac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{x + o(x)}{x + o(x)} \rightarrow 1.$$

La fonction est donc bornée sur tout intervalle du type  $[0, A]$ . La fonction tend vers 0 en  $+\infty$ , on sait donc que sa valeur absolue est majorée par 1 sur un certain intervalle  $[A, +\infty[$ .

On peut aussi écrire

$$\frac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{x}{e^x - 1} \leq 1$$

puisque par convexité de la fonction exponentielle,  $e^x - 1 \geq x$ . Soit  $M$  un majorant de la fonction  $x \mapsto \frac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}}$ . On a donc, pour tout  $x \geq 0$  (l'inégalité est aussi valable pour  $x = 0$  car  $R_n(0) = 0$ ) :

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{\ln(n+1)}.$$

On a majoré le reste par quelque chose qui ne dépend pas de  $x \in \mathbb{R}_+$  et qui tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . C'est bien que la série converge uniformément sur  $\mathbb{R}_+$ .

4. Elle se prolonge par continuité en 0 : en effet

$$\frac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{x + o(x)}{x + o(x)} \rightarrow 1.$$

5. La fonction est donc bornée sur tout intervalle du type  $[0, A]$ .

6. La fonction tend vers 0 en  $+\infty$ , on sait donc que sa valeur absolue est majorée par 1 sur un certain intervalle  $[A, +\infty[$ .

### Correction de l'exercice 26 ▲

1. Pour 0,  $f_n(0) = 0$  et la suite converge. Pour  $x > 0$ , la suite  $(g(x)e^{-nx})$  tend vers 0. La suite de fonctions  $(f_n)$  converge donc simplement vers 0. Notons  $M$  un majorant de  $|g|$ . Pour  $x > a$ , on a  $|f_n(x)| \leq Me^{-nx} \leq Me^{-na}$ , suite qui tend vers 0 indépendamment de  $x$ . Ceci prouve la convergence uniforme sur  $[a, +\infty[$ . Par continuité de  $g$  en 0, et puisque  $g(0) = 0$ , il existe  $a > 0$  tel que  $|g(x)| \leq \varepsilon$  pour  $x \in [0, a]$ . Il vient  $|f_n(x)| \leq \varepsilon$  pour tout  $x \in [0, a]$ . De plus, ce  $a$  étant fixé, la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers 0 sur  $[a, +\infty[$ . On peut donc trouver  $N$  tel que, pour  $n \geq N$ ,  $|f_n(x)| \leq \varepsilon$ . Résumons. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut trouver  $N \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq N$ , on a

$$|f_n(x)| \leq \varepsilon$$

(le  $a$  n'apparaît plus, il sert uniquement dans la preuve.) C'est bien que la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers 0 sur  $\mathbb{R}_+$ .

2. Pour 0,  $f_n(0) = 0$  et la suite converge. Pour  $x > 0$ , la suite  $(g(x)e^{-nx})$  tend vers 0. La suite de fonctions  $(f_n)$  converge donc simplement vers 0.

3. Notons  $M$  un majorant de  $|g|$ . Pour  $x > a$ , on a  $|f_n(x)| \leq Me^{-nx} \leq Me^{-na}$ , suite qui tend vers 0 indépendamment de  $x$ . Ceci prouve la convergence uniforme sur  $[a, +\infty[$ .

4. Par continuité de  $g$  en 0, et puisque  $g(0) = 0$ , il existe  $a > 0$  tel que  $|g(x)| \leq \varepsilon$  pour  $x \in [0, a]$ . Il vient  $|f_n(x)| \leq \varepsilon$  pour tout  $x \in [0, a]$ . De plus, ce  $a$  étant fixé, la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers 0 sur  $[a, +\infty[$ . On peut donc trouver  $N$  tel que, pour  $n \geq N$ ,  $|f_n(x)| \leq \varepsilon$ . Résumons. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut trouver  $N \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq N$ , on a

$$|f_n(x)| \leq \varepsilon$$

(le  $a$  n'apparaît plus, il sert uniquement dans la preuve.) C'est bien que la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers 0 sur  $\mathbb{R}_+$ .

5. L'étude se fait suivant le même principe. Pour  $x = 0$ , le terme général est nul, et pour  $x > 0$ , il s'agit du terme général d'une suite géométrique de raison de module inférieur strict à 1. On a bien convergence de  $\sum_n f_n(x)$ . De plus, si  $x \in [a, +\infty[$ , on a

$$|f_n(x)| \leq Me^{-na},$$

qui est le terme général d'une série numérique convergente. C'est bien que la série converge normalement sur  $[a, +\infty[$ . Considérons le reste de rang  $n$  de la série : pour  $x > 0$ ,

$$R_n(x) = \sum_{k \geq n+1} f_k(x) = \frac{g(x)}{1 - e^{-x}} e^{-(n+1)x}.$$

Si la courbe représentative de  $g$  est tangente à l'axe des abscisses à l'origine, c'est que  $g(x)/x$  tend vers 0. Posons alors pour  $x > 0$   $g_1(x) = \frac{g(x)}{1 - e^{-x}}$ . Puisque  $1 - e^{-x} \sim_0 x$ , on peut prolonger  $g_1$  par continuité en 0 en posant  $g_1(0) = 0$ . Ceci définit une fonction bornée sur  $\mathbb{R}_+$  et continue en 0. On se retrouve dans la situation de la question (1), et on a bien convergence uniforme du reste vers 0 sur  $\mathbb{R}_+$ , ou encore convergence uniforme de la série sur cet intervalle. Réciproquement supposons que  $g(x)/x$  ne tend pas vers 0. Alors,  $g_1$  non plus ne tend pas vers 0 en 0 et donc il existe  $\varepsilon > 0$  tel que

$$\forall \eta > 0, \exists x \in ]0, \eta[ \text{ tel que } |g_1(x)| > \varepsilon.$$

En prenant des nombres  $\eta$  de la forme  $\eta = 1/n$ , on obtient pour chaque  $n \geq 1$  un réel  $x_n$  tel que

$$0 < x_n < \frac{1}{n} \text{ et } |g_1(x_n)| > \varepsilon.$$

Mais alors,

$$|R_n(x_n)| \geq \varepsilon e^{-(n+1)x_n} \geq \varepsilon e^{-(n+1)/n} \geq e^{-1} \varepsilon / 2$$

dès que  $n$  est assez grand. Ceci nie la convergence uniforme sur  $\mathbb{R}_+$ .

6. L'étude se fait suivant le même principe. Pour  $x = 0$ , le terme général est nul, et pour  $x > 0$ , il s'agit du terme général d'une suite géométrique de raison de module inférieur strict à 1. On a bien convergence de  $\sum_n f_n(x)$ . De plus, si  $x \in [a, +\infty[$ , on a

$$|f_n(x)| \leq Me^{-na},$$

qui est le terme général d'une série numérique convergente. C'est bien que la série converge normalement sur  $[a, +\infty[$ .

7. Considérons le reste de rang  $n$  de la série : pour  $x > 0$ ,

$$R_n(x) = \sum_{k \geq n+1} f_k(x) = \frac{g(x)}{1 - e^{-x}} e^{-(n+1)x}.$$

Si la courbe représentative de  $g$  est tangente à l'axe des abscisses à l'origine, c'est que  $g(x)/x$  tend vers 0. Posons alors pour  $x > 0$   $g_1(x) = \frac{g(x)}{1 - e^{-x}}$ . Puisque  $1 - e^{-x} \sim_0 x$ , on peut prolonger  $g_1$  par continuité en 0 en posant  $g_1(0) = 0$ . Ceci définit une fonction bornée sur  $\mathbb{R}_+$  et continue en 0. On se retrouve dans la situation de la question (1), et on a bien convergence uniforme du reste vers 0 sur  $\mathbb{R}_+$ , ou encore convergence uniforme de la

série sur cet intervalle. Réciproquement supposons que  $g(x)/x$  ne tend pas vers 0. Alors,  $g_1$  non plus ne tend pas vers 0 en 0 et donc il existe  $\varepsilon > 0$  tel que

$$\forall \eta > 0, \exists x \in ]0, \eta[ \text{ tel que } |g_1(x)| > \varepsilon.$$

En prenant des nombres  $\eta$  de la forme  $\eta = 1/n$ , on obtient pour chaque  $n \geq 1$  un réel  $x_n$  tel que

$$0 < x_n < \frac{1}{n} \text{ et } |g_1(x_n)| > \varepsilon.$$

Mais alors,

$$|R_n(x_n)| \geq \varepsilon e^{-(n+1)x_n} \geq \varepsilon e^{-(n+1)/n} \geq e^{-1} \varepsilon / 2$$

dès que  $n$  est assez grand. Ceci nie la convergence uniforme sur  $\mathbb{R}_+$ .

### Correction de l'exercice 27 ▲

1. Il est clair que la suite  $\left(\frac{1}{x+n}\right)_n$ , pour  $x > -1$  fixé, est positive, décroissante et tend vers 0. Par application du critère des séries alternées, la série est convergente pour tout  $x > -1$ .

2. Posons  $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$ . Nous avons vérifié à la question précédente que, pour  $x > -1$  fixé, la série  $\sum_n u_n(x)$  vérifie le critère des séries alternées. Par conséquent, on sait que son reste  $R_n(x)$  vérifie

$$|R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{x+n+1}.$$

Puisque  $x > -1$ , on a en particulier

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{n}.$$

Ceci tend vers 0 (indépendamment de  $x$ ), de sorte qu'on a prouvé la convergence uniforme de la série  $\sum_n u_n$  sur  $I$ . Puisque chaque fonction  $u_n$  est continue, la fonction  $S$  est continue sur  $I$ .

3. Chaque fonction  $u_n$  est dérivable sur  $I$  avec  $u'_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}$ . De même qu'à la question précédente, pour  $x > -1$  fixé, la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x)$  est convergente car elle vérifie les conditions du critère des séries alternées. De plus, si on note  $T_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u'_k(x)$  son reste, on a  $|T_n(x)| \leq \frac{1}{(x+n+1)^2} \leq \frac{1}{n^2}$ , inégalité valable pour tout  $x > -1$ . On peut donc majorer uniformément le reste par une quantité qui tend vers 0 : la série dérivée est uniformément convergente. On en déduit que la fonction  $S$  est dérivable, et que sa dérivée est donnée par  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}$ . De plus, on sait qu'on peut encadrer la somme d'une série alternée par deux sommes partielles consécutives, par exemple ici

$$0 \leq \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} \leq S'(x) \leq \frac{1}{(x+1)^2}.$$

En particulier, la dérivée est positive et la fonction est croissante.

4. De même qu'à la question précédente, par le critère des séries alternées, on peut encadrer  $S$  par deux sommes partielles consécutives :

$$\frac{-1}{x+1} \leq S(x) \leq \frac{-1}{x+1} + \frac{1}{x+2}.$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème d'encadrement des limites pour prouver que

$$\lim_{x \rightarrow -1} S(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = 0.$$

### Correction de l'exercice 28 ▲

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \geq 1$ . Alors on a

$$\frac{1}{n^2 + x^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

qui ne dépend plus de  $x$  et est le terme général d'une série convergente. Ceci prouve la convergence normale de  $\sum_{n \geq 1} u_n$  sur  $\mathbb{R}$ .

2. Par le théorème de régularité des séries de fonctions, il suffit de démontrer la convergence normale de  $\sum_{n \geq 1} u'_n$  sur  $\mathbb{R}$ . Mais, pour tout  $n \geq 1$  et tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$u'_n(x) = \frac{-2x}{(n^2 + x^2)^2}.$$

Or, si  $|x| \leq 1$ , on a  $|x|/(x^2 + n^2) \leq 1$  et si  $|x| \geq 1$ ,  $x^2 \geq |x|$  et donc  $|x|/(x^2 + n^2) \leq 1$ . On a donc, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $n \geq 1$ ,

$$|u'_n(x)| \leq \frac{1}{n^2 + x^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Ceci prouve à nouveau la convergence normale de  $\sum_{n \geq 1} u'_n$  sur  $\mathbb{R}$ .

3. On remarque que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0$ . Par convergence normale de  $\sum_{n \geq 1} u_n$  sur  $\mathbb{R}$ , on peut appliquer le théorème d'inversion limite/somme et on trouve que  $S$  admet une limite en  $+\infty$  et que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0.$$

### Correction de l'exercice 29 ▲

On pose  $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{1+nx}$ .

1. La série définissant  $S$  converge d'après le critère des séries alternées. De plus, notant  $R_n(x)$  le reste de la série, le critère des séries alternées donne également

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{1+(n+1)x}.$$

Fixons maintenant  $a > 0$ . Alors, pour tout  $x \geq a$ ,

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{1+(n+1)x} \leq \frac{1}{1+(n+1)a}.$$

Ainsi, la suite  $(|R_n(x)|)$  est majorée pour  $x \in [a, +\infty[$  par la suite  $\left(\frac{1}{1+(n+1)a}\right)$ , qui ne dépend pas de  $x$ , et qui tend vers 0. Ceci prouve la convergence uniforme de la série sur l'intervalle  $[a, +\infty[$ . Comme chaque fonction est continue sur  $[a, +\infty[$ , il en est de même de  $S$ . Puisque  $a > 0$  est arbitraire,  $S$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

2. Puisque la convergence est uniforme sur l'intervalle  $[1, +\infty[$ , on peut appliquer le théorème d'interversion limite/séries et on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n \geq 0} u_n(x) = \sum_{n \geq 0} \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} u_0(x) = 1.$$

On pouvait également appliquer le critère des séries alternées, et encadrer la somme par les deux premières sommes partielles. On a donc, pour tout  $x > 0$ ,

$$1 - \frac{1}{1+x} \leq S(x) \leq 1.$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème des gendarmes.

3. La série définissant  $S$  converge simplement sur  $]0, +\infty[$ . Chaque fonction  $u_n$  est de classe  $C^1$  sur ce même intervalle, avec

$$u'_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}n}{(1+nx)^2}.$$

On fixe  $a > 0$  et on va démontrer la convergence uniforme de la série  $\sum_{n \geq 0} u'_n(x)$  sur  $[a, +\infty[$  en appliquant le critère des séries alternées. Soit  $x \geq a$ . On a après réduction au même dénominateur et simplification

$$|u'_n(x)| - |u'_{n+1}(x)| = \frac{n(n+1)x^2 - 1}{(1+nx)^2(1+(n+1)x)^2}.$$

Soit  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que, pour  $n \geq n_0$ , on ait

$$n(n+1)a^2 - 1 \geq 0.$$

Alors  $n(n+1)x^2 - 1 \geq 0$  et donc la série de terme général  $u'_n(x)$  converge d'après le critère des séries alternées. De plus, si on note  $T_n$  le reste de la série  $\sum_n u'_n$ , alors on a

$$|T_n(x)| \leq \frac{n+1}{(1+(n+1)x)^2} \leq \frac{n+1}{(1+(n+1)a)^2}.$$

On conclut à la convergence uniforme comme à la première question. Donc, par les théorèmes généraux,  $S$  est de classe  $C^1$  sur  $[a, +\infty[$ . Comme  $a > 0$  est arbitraire,  $S$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Sa dérivée est donnée par  $S'(x) = \sum_{n \geq 0} u'_n(x)$ .

### Correction de l'exercice 30 ▲

1. Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a  $|u_n(t)| \leq \frac{\pi}{2n^2}$ , qui est le terme général d'une série convergente. La série  $\sum_n u_n(t)$  est donc absolument convergente pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

2. L'argument de la question précédente prouve qu'en réalité, la convergence est normale sur  $\mathbb{R}$  (on a obtenu une majoration qui ne dépend pas de  $t$ ). Puisque chaque fonction  $u_n$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , il en est donc de même de  $S$ . De plus, chaque  $u_n$  est impaire, et donc  $S$  est impaire.

3. Puisque la série converge normalement, donc uniformément, sur  $\mathbb{R}$ , on peut appliquer le théorème de la double limite et on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{t \rightarrow +\infty} u_n(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{2n^2} = \frac{\pi^3}{12}.$$

4. Puisque la fonction arctan est croissante, chaque  $u_n$  est croissante. On en déduit que  $S$  est croissante.

5. Remarquons que, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{u_n(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arctan(nt)}{n(nt)} = \frac{1}{n} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\arctan u}{u} = \frac{1}{n}.$$

Puisqu'on a une somme finie, on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sum_{n=1}^N \frac{u_n(t)}{t} = \sum_{n=1}^N \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u_n(t)}{t} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}.$$

Appliquant la définition de la limite avec  $\varepsilon = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$ , on obtient le résultat demandé.

6. Fixons  $A > 0$ . Alors, puisque la série  $\sum_n \frac{1}{n}$  est divergente, il existe un entier  $N$  tel que

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \geq A.$$

D'après la question précédente, il existe  $t_0 > 0$  tel que, pour tout  $t \in ]-t_0, t_0[ \setminus \{0\}$ ,

$$\sum_{n=1}^N \frac{u_n(t)}{t} \geq A.$$

Puisque pour  $t \neq 0$ ,  $\arctan(nt)/t \geq 0$ , on en déduit que, pour tout  $t \in ]-t_0, t_0[ \setminus \{0\}$ ,

$$\frac{S(t)}{t} \geq \sum_{n=1}^N \frac{u_n(t)}{t} \geq A.$$

Ceci prouve que  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)-S(0)}{t-0} = +\infty$ , ce qui prouve que la courbe représentative de  $S$  admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.

### Correction de l'exercice 31 ▲

1. La série définissant  $\zeta(s)$  est une série de Riemann. Elle est convergente si et seulement si  $s > 1$ . De plus, pour chaque  $n \geq 1$ , les fonctions  $s \mapsto n^{-s}$  sont décroissantes, et même strictement décroissantes pour  $n \geq 2$ . Pour  $1 < s < t$ , on a donc

$$1 + 2^{-s} > 1 + 2^{-t} \text{ et } \sum_{n \geq 3} \frac{1}{n^s} \geq \sum_{n \geq 3} \frac{1}{n^t}$$



(la deuxième inégalité n'est qu'une inégalité large car on passe à la limite). Ajoutant les deux inégalités, on en déduit que

$$\zeta(s) > \zeta(t),$$

ce qui prouve que  $\zeta$  est strictement décroissante.

2. Chaque fonction  $s \mapsto n^{-s}$  est continue sur son domaine de définition. Il suffit de démontrer que la série de fonctions converge normalement, donc uniformément, sur tout intervalle du type  $[a, +\infty[$ , avec  $a > 1$ , pour prouver que la fonction est continue sur  $]1, +\infty[$ . Or, pour tout  $s \in [a, +\infty[$ , on a

$$\left| \frac{1}{n^s} \right| \leq \frac{1}{n^a},$$

et le terme de droite est le terme général d'une série numérique convergente. Ceci prouve la convergence normale de  $f$  sur  $[a, +\infty[$ .

3. Puisque la série définissant  $\zeta$  converge uniformément sur  $[a, +\infty[$ , on peut appliquer le théorème d'inter-version des limites, et on obtient

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^s} = 1$$

car si  $n \geq 2$ ,  $n^{-s} \rightarrow 0$  si  $s \rightarrow +\infty$  et  $1^s = 1$  pour tout  $s > 0$ .

4. Pour  $x \in [k, k+1]$ , on a

$$\frac{1}{(k+1)^s} \leq \frac{1}{x^s} \leq \frac{1}{k^s}.$$

En intégrant cette inégalité entre  $k$  et  $k+1$ , on trouve

$$\frac{1}{(k+1)^s} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^s} \leq \frac{1}{k^s}.$$

On somme maintenant ces deux inégalités pour  $k$  allant de 1 à  $+\infty$ . On obtient

$$\zeta(s) - 1 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s} \leq \zeta(s).$$

Or,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1}.$$

On obtient finalement :

$$\frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq \frac{1}{s-1} + 1$$

ou encore

$$1 \leq (s-1)\zeta(s) \leq 1 + (s-1).$$

Par le théorème des gendarmes,  $(s-1)\zeta(s)$  tend vers 1 lorsque  $s$  tend vers 1. C'est bien que  $\zeta(s) \sim_{1+} \frac{1}{s-1}$ . En particulier,  $\lim_{s \rightarrow 1} \zeta(s) = +\infty$ .

5. On va démontrer que  $\zeta$  est de classe  $C^2$  sur  $]1, +\infty[$  et prouver que  $\zeta''(s) \geq 0$  pour tout  $s > 1$ . Pour prouver que  $\zeta$  est dérivable sur  $]1, +\infty[$ , on prouve que la série dérivée converge uniformément sur tout intervalle  $[a, +\infty[$ ,  $a > 1$ . Notons  $f_n(s) = n^{-s}$ ,  $n \geq 1$  et  $s > 1$ . Alors  $f'_n(s) = (-\ln n)n^{-s}$ . Pour  $s \in [a, +\infty[$ , on a

$$|f'_n(s)| \leq \frac{\ln n}{n^a}.$$

Or, le terme apparaissant à gauche est le terme général d'une série numérique convergente. En effet, pour  $b \in ]1, a[$ , on a

$$n^b \frac{\ln n}{n^a} \rightarrow 0 \text{ et donc } \frac{\ln n}{n^a} = o(n^{-b}).$$

Comme  $\sum_{n \geq 1} n^{-b}$  converge, il en est de même de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^a}$ . Par théorème de dérivation d'une série de fonctions, on en déduit que  $\zeta$  est  $C^1$  sur tout intervalle  $[a, +\infty[$ , donc sur  $]1, +\infty[$ , et que sa dérivée  $\zeta'$  vérifie

$$\zeta'(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{-\ln n}{n^s}.$$

De même, on prouve que  $\zeta$  est de classe  $C^2$  et que

$$\zeta''(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{(\ln n)^2}{n^s}.$$

Comme tous les termes apparaissant dans la série sont positifs, on en déduit que  $\zeta''$  est positive. En particulier,  $\zeta$  est convexe.

6.

---

### Correction de l'exercice 32 ▲

1. Remarquons d'abord que s'il existe  $n \geq 1$  de sorte que  $x = -\frac{1}{n}$ , alors  $u_n(x)$  n'est pas définie. On considère donc  $x \in \mathbb{R}$  qui n'est pas égal à l'un des  $-\frac{1}{n}$ . Si  $x = 0$ , alors  $u_n(x) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}$ , et donc la série est divergente. Si  $x \neq 0$ , alors  $u_n(x) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2 x}$  et donc la série est convergente. On en déduit que la série converge simplement sur  $\mathbb{R}^* \setminus \{-\frac{1}{n}; n \geq 1\}$ .

2. On va démontrer la convergence normale de la série de fonctions sur tout intervalle  $[a, +\infty[$ , avec  $a > 0$ . Chaque  $u_n$  étant continue, ceci démontrera que  $S$  est continue sur  $[a, +\infty[$ . Puisque  $a > 0$  est arbitraire, ceci prouvera la continuité de  $S$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Donc, pour  $x \geq a$ , on a

$$0 \leq u_n(x) \leq \frac{1}{n + n^2 a}.$$

Or,  $\frac{1}{n + n^2 a}$  est le terme général d'une série numérique convergente. Donc la série  $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$  converge normalement sur  $[a, +\infty[$ .

3. Chaque  $u_n$  étant décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ , il en est de même de la somme  $S$ . On aurait pu aussi démontrer que  $S$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , et étudier le signe de la dérivée.

4. Par convergence normale, donc uniforme, sur  $[1, \infty[$ , on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n \geq 1} u_n(x) = \sum_{n \geq 1} \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0.$$

5. Puisque  $S$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $S$  admet une limite en 0. Pour  $x > 0$ , on a

$$S(x) \geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n + n^2 x}.$$

On passe à la limite, et on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 0} S(x) \geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}.$$

Fixons maintenant  $A > 0$ . Par divergence de la série de terme général  $\frac{1}{n}$ , on sait qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  de sorte que

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \geq A.$$

On a donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} S(x) \geq A.$$

Puisque  $A$  est arbitraire, il vient  $\lim_{x \rightarrow 0} S(x) = +\infty$ .

---

### Correction de l'exercice 33 ▲

1. Pour  $t < 0$ ,  $\frac{e^{-nt}}{1+n^2}$  ne tend pas vers 0. La série diverge donc grossièrement. Pour  $t \geq 0$ , on a l'inégalité suivante :

$$0 \leq \frac{e^{-nt}}{1+n^2} \leq \frac{1}{1+n^2}.$$

Comme le terme de droite est le terme général d'une série convergente, la série  $\sum_n \frac{e^{-nt}}{1+n^2}$  est convergente. Donc le domaine de définition de  $f$  est  $[0, +\infty[$ .

2. L'inégalité précédente prouve en fait que la série de fonctions est normalement convergente sur  $[0, +\infty[$ . Chaque fonction  $t \mapsto \frac{e^{-nt}}{1+n^2}$  étant continue,  $f$  est elle-même continue. On va maintenant étudier la convergence normale des séries dérivées. Fixons  $a > 0$  et posons  $f_n(t) = \frac{e^{-nt}}{1+n^2}$ . Alors, pour  $k \geq 1$ , on a

$$f_n^{(k)}(t) = (-1)^k n^k \frac{e^{-nt}}{1+n^2}.$$

En particulier, pour  $t \geq a$ , on a

$$\left| f_n^{(k)}(t) \right| \leq n^k \frac{e^{-na}}{1+n^2}.$$

Or, le terme apparaissant à droite est le terme général d'une série convergente, puisque  $a > 0$  et donc

$$n^k \frac{e^{-na}}{1+n^2} = o(n^{-2}).$$

Ainsi, chaque série  $\sum_n f_n^{(k)}$  converge normalement sur  $[a, +\infty[$ . Ceci prouve que  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $[a, +\infty[$ . Comme  $a > 0$  est arbitraire, la fonction est de classe  $C^\infty$  sur  $]0, +\infty[$ .

3. Puisque  $\frac{n}{1+n^2} \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$ , la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{1+n^2}$  est divergente, et la suite de ces sommes partielles tend vers  $+\infty$ . On en déduit l'existence de  $N \geq 1$  tel que

$$\sum_{n=1}^N \frac{n}{1+n^2} \geq A.$$

Lorsque  $h$  tend vers 0, la quantité  $\sum_{n=1}^N \frac{e^{-nh}-1}{h(1+n^2)}$  converge vers  $\sum_{n=1}^N \frac{-n}{1+n^2} \leq -A$ . En particulier, il existe  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $h \in ]0, \delta[$ , on a

$$\sum_{n=1}^N \frac{e^{-nh}-1}{h(1+n^2)} \leq -A+1.$$

Le taux de variation de  $f$  en 0 est égal à

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nh}-1}{h(1+n^2)}.$$

Puisque, pour tout  $n \geq 1$ ,  $e^{-nh} \leq 1$ , on en déduit que

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} \leq \sum_{n=1}^N \frac{e^{-nh}-1}{h(1+n^2)}.$$

D'après le résultat de la question précédente, on peut trouver  $\delta < 0$  tel que, pour tout  $h \in ]0, \delta[$ , on a

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} \leq -A+1.$$

Ceci est la définition de  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = -\infty$ . Ainsi,  $f$  n'est pas dérivable en 0, mais sa courbe représentative admet au point d'abscisse 0 une tangente verticale.

4. Puisque  $\frac{n}{1+n^2} \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$ , la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{1+n^2}$  est divergente, et la suite de ces sommes partielles tend vers  $+\infty$ . On en déduit l'existence de  $N \geq 1$  tel que

$$\sum_{n=1}^N \frac{n}{1+n^2} \geq A.$$

5. Lorsque  $h$  tend vers 0, la quantité  $\sum_{n=1}^N \frac{e^{-nh}-1}{h(1+n^2)}$  converge vers  $\sum_{n=1}^N \frac{-n}{1+n^2} \leq -A$ . En particulier, il existe  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $h \in ]0, \delta[$ , on a

$$\sum_{n=1}^N \frac{e^{-nh}-1}{h(1+n^2)} \leq -A+1.$$

6. Le taux de variation de  $f$  en 0 est égal à

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nh}-1}{h(1+n^2)}.$$

Puisque, pour tout  $n \geq 1$ ,  $e^{-nh} \leq 1$ , on en déduit que

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} \leq \sum_{n=1}^N \frac{e^{-nh} - 1}{h(1+n^2)}.$$

D'après le résultat de la question précédente, on peut trouver  $\delta < 0$  tel que, pour tout  $h \in ]0, \delta[$ , on a

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} \leq -A + 1.$$

Ceci est la définition de  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = -\infty$ . Ainsi,  $f$  n'est pas dérivable en 0, mais sa courbe représentative admet au point d'abscisse 0 une tangente verticale.

7. Puisque la série définissant  $f$  converge normalement sur  $[0, +\infty[$ , on peut appliquer le théorème d'inter-version des limites. On en déduit

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{n \geq 1} \frac{e^{-nt}}{1+n^2} = \sum_{n \geq 1} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-nt}}{1+n^2} = 0.$$

### Correction de l'exercice 34 ▲

1. Remarquons d'abord que la série est convergente quelque soit  $x \in \mathbb{R}$ . Notons  $u_n(x) = \frac{x}{x^2+n^2}$  et fixons  $M > 0$ . Alors, pour tout  $x \in [-M, M]$ , on a

$$|u_n(x)| \leq \frac{M}{n^2},$$

et le membre de droite est le terme général d'une série numérique convergente. On en déduit que la série de fonctions  $S(x) = \sum_{n \geq 1} u_n(x)$  converge normalement (donc uniformément) sur  $[-M, M]$ . Puisque chaque fonction  $x \mapsto u_n(x)$  est continue, on en déduit que  $S$  est continue sur  $[-M, M]$ . Comme  $M > 0$  est arbitraire, on en déduit finalement que  $S$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

2. La fonction  $t \mapsto \frac{x}{x^2+t^2}$  est décroissante sur  $[0, +\infty[$ . En particulier, pour tout  $t \in [n, n+1]$ , on a

$$\frac{x}{t^2+x^2} \leq \frac{x}{n^2+x^2}.$$

Intégrer cette inégalité entre  $n$  et  $n+1$  donne la partie droite de l'inégalité précédente. Pour l'autre partie, on part de

$$\frac{x}{n^2+x^2} \leq \frac{x}{t^2+x^2} \text{ pour tout } t \in [n-1, n],$$

et on intègre cette inégalité entre  $n-1$  et  $n$ .

3. Sommons les inégalités précédentes pour  $n$  allant de 1 à  $+\infty$ . On trouve :

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2+t^2} dt \leq S(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+t^2} dt.$$

Mais on peut calculer les intégrales, et on trouve que

$$\frac{\pi}{2} - \arctan(1/x) \leq S(x) \leq \pi/2.$$

Si on fait tendre  $x$  vers  $+\infty$ , on trouve par le théorème des gendarmes que  $S(x)$  tend vers  $\pi/2$ .

### Correction de l'exercice 35 ▲

1. Posons, pour  $x \in I$ ,  $u_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)}$ . On a, pour  $x > -1$  fixé,  $u_n(x) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{n^2}$  et donc la série  $\sum_n u_n(x)$  est convergente. Pour prouver la continuité de  $S$  sur  $I$ , fixons  $-1 < a < b$  et prouvons la convergence normale sur  $[a, b]$ . On a en effet, pour tout  $x \in [a, b]$ ,

$$|u_n(x)| \leq \frac{\max(|a|, |b|)}{n(n+a)}.$$

Le membre de droite est le terme général d'une série numérique convergente, et donc la série converge normalement sur  $[a, b]$ .

2. Il est facile de vérifier (par exemple en les dérivant) que toutes les fonctions  $u_n$  sont croissantes. Donc  $S$  est croissante.

3. On a

$$\begin{aligned} S(x+1) - S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x+1} \right) - \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right) \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+x} \right) - \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right) \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) - 1 + \frac{1}{x+1} \\ &= 1 - 1 + \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{1}{x+1}. \end{aligned}$$

4. On remarque que  $S(0) = 0$ . Par continuité de  $S$  en 0,  $S(x+1) \rightarrow 0$  si  $x \rightarrow -1^+$ . On a donc

$$S(x) = S(x+1) - \frac{1}{x+1} \sim_{-1^+} \frac{-1}{x+1}.$$

5. D'après la troisième question, on sait que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$S(n+1) - S(n) = \frac{1}{n+1}.$$

Sachant que  $S(0) = 0$ , une récurrence immédiate établit immédiatement le résultat voulu.

6. On a, par croissance de la fonction  $S$ , pour tout  $x > 0$ ,

$$S(\lfloor x \rfloor) \leq S(x) \leq S(\lfloor x \rfloor + 1)$$

soit

$$\frac{\ln \lfloor x \rfloor}{\ln x} \times \frac{S(\lfloor x \rfloor)}{\ln \lfloor x \rfloor} \leq \frac{S(x)}{\ln x} \leq \frac{\ln \lfloor x+1 \rfloor}{\ln x} \times \frac{S(\lfloor x+1 \rfloor)}{\ln \lfloor x+1 \rfloor}.$$

On montre facilement que les membres de gauche et de droite de cette inégalité tendent vers 1, notamment parce que  $\ln(x)/\ln(\lfloor x \rfloor)$  tend vers 1 si  $x$  tend vers  $+\infty$  et d'après l'équivalent classique de la série harmonique. C'est donc que

$$S(x) \sim_{+\infty} \ln(x).$$

### Correction de l'exercice 36 ▲

1. Pour  $x \in ]-1, 1[$  fixé, on a

$$|f_n(x)| \leq \frac{|x|^n}{n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et donc la série (numérique)  $\sum_n f_n(x)$  converge (absolument) pour tout  $x \in ]-1, 1[$ . Autrement dit, la série (de fonctions)  $\sum_n f_n$  converge simplement sur  $] -1, 1[$ .

2. On commence par calculer  $f'_n$  :

$$f'_n(x) = x^{n-1} \sin(nx) + x^n \cos(nx).$$

Pour tout  $x \in [-a, a]$ , on a

$$|f'_n(x)| \leq 2a^{n-1},$$

qui est le terme général d'une série convergente. Ainsi,  $\sum_n f'_n$  converge normalement sur  $[-a, a]$ .  $\sum_n f_n$  converge simplement vers  $f$  sur  $] -1, 1[$ , chaque  $f_n$  est  $C^1$  et  $\sum_n f'_n$  converge normalement, donc uniformément, sur

$[-a, a]$ . Ainsi,  $f$  est  $C^1$  sur  $[-a, a]$  avec  $f' = \sum_n f'_n$ . Comme  $a$  est arbitraire dans  $]0, 1[$ ,  $f$  est  $C^1$  sur  $] -1, 1[$ , de dérivée  $f'(x) = \sum_{n \geq 1} f'_n(x)$ . En fait, on peut effectivement calculer  $f'$ . En effet, pour  $x \in ] -1, 1[$ , puisque  $xe^{ix} \neq 1$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} \sum_{n \geq 1} \Im m((xe^{ix})^n) + \sum_{n \geq 1} \Re e((xe^{ix})^n) \\ &= \Im m\left(\frac{e^{ix}}{1 - xe^{ix}}\right) + \Re e\left(\frac{xe^{ix}}{1 - xe^{ix}}\right) \\ &= \Im m\left(\frac{e^{ix}(1 - xe^{-ix})}{(1 - xe^{ix})(1 - xe^{-ix})}\right) + \Re e\left(\frac{xe^{ix}(1 - xe^{-ix})}{(1 - xe^{ix})(1 - xe^{-ix})}\right) \\ &= \Im m\left(\frac{e^{ix} - x}{1 - 2x \cos x + x^2}\right) + \Re e\left(\frac{xe^{ix} - x^2}{1 - 2x \cos x + x^2}\right) \\ &= \frac{\sin x + x \cos x - x^2}{1 - 2x \cos x + x^2}. \end{aligned}$$

Posons  $g(t) = \arctan \frac{t \sin t}{1 - t \cos t}$ . Un calcul facile (mais fastidieux !) prouve que  $g'(t) = f'(t)$  pour tout  $t \in ] -1, 1[$ . De plus,  $g(0) = f(0) = 0$ . C'est bien que  $f = g$  sur  $] -1, 1[$ .

3. On commence par calculer  $f'_n$  :

$$f'_n(x) = x^{n-1} \sin(nx) + x^n \cos(nx).$$

Pour tout  $x \in [-a, a]$ , on a

$$|f'_n(x)| \leq 2a^{n-1},$$

qui est le terme général d'une série convergente. Ainsi,  $\sum_n f'_n$  converge normalement sur  $[-a, a]$ .

4.  $\sum_n f_n$  converge simplement vers  $f$  sur  $] -1, 1[$ , chaque  $f_n$  est  $C^1$  et  $\sum_n f'_n$  converge normalement, donc uniformément, sur  $[-a, a]$ . Ainsi,  $f$  est  $C^1$  sur  $[-a, a]$  avec  $f' = \sum_n f'_n$ . Comme  $a$  est arbitraire dans  $]0, 1[$ ,  $f$  est  $C^1$  sur  $] -1, 1[$ , de dérivée  $f'(x) = \sum_{n \geq 1} f'_n(x)$ . En fait, on peut effectivement calculer  $f'$ . En effet, pour  $x \in ] -1, 1[$ , puisque  $xe^{ix} \neq 1$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} \sum_{n \geq 1} \Im m((xe^{ix})^n) + \sum_{n \geq 1} \Re e((xe^{ix})^n) \\ &= \Im m\left(\frac{e^{ix}}{1 - xe^{ix}}\right) + \Re e\left(\frac{xe^{ix}}{1 - xe^{ix}}\right) \\ &= \Im m\left(\frac{e^{ix}(1 - xe^{-ix})}{(1 - xe^{ix})(1 - xe^{-ix})}\right) + \Re e\left(\frac{xe^{ix}(1 - xe^{-ix})}{(1 - xe^{ix})(1 - xe^{-ix})}\right) \\ &= \Im m\left(\frac{e^{ix} - x}{1 - 2x \cos x + x^2}\right) + \Re e\left(\frac{xe^{ix} - x^2}{1 - 2x \cos x + x^2}\right) \\ &= \frac{\sin x + x \cos x - x^2}{1 - 2x \cos x + x^2}. \end{aligned}$$

5. Posons  $g(t) = \arctan \frac{t \sin t}{1 - t \cos t}$ . Un calcul facile (mais fastidieux !) prouve que  $g'(t) = f'(t)$  pour tout  $t \in ] -1, 1[$ . De plus,  $g(0) = f(0) = 0$ . C'est bien que  $f = g$  sur  $] -1, 1[$ .

6. On calcule cette somme de la même façon qu'à la question précédente :

$$A_n(t) = \Im m\left(\frac{te^{it} - t^{n+1}e^{i(n+1)t}}{1 - te^{it}}\right).$$

Or,  $|te^{it} - t^{n+1}e^{i(n+1)t}| \leq 2$  pour  $t \in [-1, 1]$ , et  $1 - te^{it}$  est une fonction continue qui ne s'annule pas sur  $[-1, 1]$ . Elle est donc minorée par une constante  $a > 0$ , et donc

$$|A_n(t)| \leq \frac{2}{a}.$$

C'est un calcul direct en faisant un changement d'indices dans la somme. La seule nouveauté est la convergence en 1 et en -1, mais on traite tout  $[-1, 1]$ . On a d'une part, pour tout  $t \in [-1, 1]$ ,

$$\frac{A_n(t)}{n} \rightarrow 0.$$

D'autre part, puisque

$$\left| \frac{A_k(t)}{k(k+1)} \right| \leq \frac{M}{k^2},$$

la série  $\sum_k \frac{A_k(t)}{k(k+1)}$  converge (absolument). Ceci signifie que la suite  $\left( \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k(t)}{k(k+1)} \right)_n$  admet une limite. De l'écriture obtenue à la question précédente, on déduit que la somme  $\sum_{k=1}^n f_k(t)$  converge et que

$$f(t) = \sum_{k \geq 1} f_k(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A_k(t)}{k(k+1)}.$$

Or, la série  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A_k(t)}{k(k+1)}$  converge normalement sur l'intervalle  $[-1, 1]$ , puisque

$$\frac{|A_k(t)|}{k(k+1)} \leq \frac{M}{k(k+1)}.$$

Chaque terme  $t \mapsto \frac{A_k(t)}{k(k+1)}$  étant continue,  $f$  est elle-même continue sur  $[-1, 1]$ . Prenons l'égalité

$$f(t) = \arctan \frac{t \sin t}{1 - t \cos t}$$

valable pour  $t \in ]-1, 1[$ . On fait tendre  $t$  vers 1 dans les deux membres. Comme on a deux fonctions continues, on obtient

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n} = \arctan \left( \frac{\sin 1}{1 - \cos 1} \right).$$

On peut simplifier ce résultat à l'aide des formules de trigonométrie pour obtenir que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi - 1}{2}.$$

En faisant de même tendre  $t$  vers  $-1$ , on trouve que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \sin n}{n} = -\arctan \left( \frac{\sin 1}{1 + \cos 1} \right) = -\frac{1}{2}.$$

7. On calcule cette somme de la même façon qu'à la question précédente :

$$A_n(t) = \Im m \left( \frac{te^{it} - t^{n+1}e^{i(n+1)t}}{1 - te^{it}} \right).$$

Or,  $|te^{it} - t^{n+1}e^{i(n+1)t}| \leq 2$  pour  $t \in [-1, 1]$ , et  $1 - te^{it}$  est une fonction continue qui ne s'annule pas sur  $[-1, 1]$ . Elle est donc minorée par une constante  $a > 0$ , et donc

$$|A_n(t)| \leq \frac{2}{a}.$$

8. C'est un calcul direct en faisant un changement d'indices dans la somme.

9. La seule nouveauté est la convergence en 1 et en -1, mais on traite tout  $[-1, 1]$ . On a d'une part, pour tout  $t \in [-1, 1]$ ,

$$\frac{A_n(t)}{n} \rightarrow 0.$$

D'autre part, puisque

$$\left| \frac{A_k(t)}{k(k+1)} \right| \leq \frac{M}{k^2},$$

la série  $\sum_k \frac{A_k(t)}{k(k+1)}$  converge (absolument). Ceci signifie que la suite  $\left( \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k(t)}{k(k+1)} \right)_n$  admet une limite. De l'écriture obtenue à la question précédente, on déduit que la somme  $\sum_{k=1}^n f_k(t)$  converge et que

$$f(t) = \sum_{k \geq 1} f_k(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A_k(t)}{k(k+1)}.$$

Or, la série  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A_k(t)}{k(k+1)}$  converge normalement sur l'intervalle  $[-1, 1]$ , puisque

$$\frac{|A_k(t)|}{k(k+1)} \leq \frac{M}{k(k+1)}.$$

Chaque terme  $t \mapsto \frac{A_k(t)}{k(k+1)}$  étant continue,  $f$  est elle-même continue sur  $[-1, 1]$ .

10. Prenons l'égalité

$$f(t) = \arctan \frac{t \sin t}{1 - t \cos t}$$

valable pour  $t \in ]-1, 1[$ . On fait tendre  $t$  vers 1 dans les deux membres. Comme on a deux fonctions continues, on obtient

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n} = \arctan \left( \frac{\sin 1}{1 - \cos 1} \right).$$

On peut simplifier ce résultat à l'aide des formules de trigonométrie pour obtenir que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi - 1}{2}.$$

En faisant de même tendre  $t$  vers  $-1$ , on trouve que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \sin n}{n} = -\arctan \left( \frac{\sin 1}{1 + \cos 1} \right) = -\frac{1}{2}.$$

### Correction de l'exercice 37 ▲

1. Si  $x \leq 0$ , la série diverge grossièrement, et si  $x > 0$ , elle vérifie le critère des séries alternées et donc elle est convergente.

2. Posons  $v_n(x) = \frac{1}{n^x}$  de sorte que  $\mu(x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} v_n(x)$ . Fixons  $a > 0$ . Puisque chaque fonction  $v_n$  est de classe  $C^\infty$ , il suffit de prouver que, pour chaque  $p \geq 0$ , la série  $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} v_n^{(p)}(x)$  converge uniformément sur  $[a, +\infty[$ . On a

$$v_n^{(p)}(x) = (-1)^p (\ln n)^p n^{-x}.$$

On souhaite appliquer le critère des séries alternées à  $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} v_n(x)$  mais il faut vérifier que la valeur absolue du terme général est bien décroissante. Pour cela, on introduit  $h(t) = (\ln t)^p t^{-x}$ . Alors  $h$  est dérivable et  $h'(t) = (\ln t)^{p-1} t^{-x-1} (p - x \ln t)$ . Lorsque  $n$  est supérieur à  $\exp(p/x)$ , on a  $h(n+1) \leq h(n)$  et donc la série vérifie bien le critère des séries alternées. En particulier, pour tout  $x \in [a, +\infty[$ , pour tout  $n \geq \exp(p/a)$  (remarquons que ce terme ne dépend pas du  $x$  choisi dans  $[a, +\infty[$ ), on a par le critère des séries alternées

$$|R_n(x)| \leq \ln^p(n+1)(n+1)^{-x} \leq \ln^p(n+1)(n+1)^{-a},$$

où  $R_n(x)$  désigne le reste de la série  $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} v_n^{(p)}(x)$ . Le reste est donc majorée indépendamment de  $x \in [a, +\infty[$  par une suite qui tend vers 0. La série  $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} v_n^{(p)}(x)$  est donc uniformément convergente sur  $[a, +\infty[$  pour  $p \geq 0$ , ce qui prouve que  $\mu$  est de classe  $C^\infty$  sur  $]0, +\infty[$  et que  $\mu^{(p)}(x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} v_n^{(p)}(x)$ .



3. Puisque la série définissant  $\mu$  converge uniformément sur  $[1, +\infty[$ , on peut appliquer le théorème d'inter-version des limites. Or, pour chaque  $N \geq 1$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n+1}}{n^x} = 1$$

(le premier terme de cette somme finie est constant égal à 1, les autres termes tendent vers 0). On en déduit que  $\mu$  tend vers 1 en  $+\infty$ .

4. C'est un calcul simple si on remarque que  $\mu(x) = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)^x}$ . Fixons  $x > 0$ . Alors la suite  $n \mapsto \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}$  tend vers 0 et est décroissante (par exemple, en utilisant le théorème des accroissements finis ou en étudiant la fonction  $u \mapsto \frac{1}{u^x} - \frac{1}{(u+1)^x}$ ). En particulier, la série  $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \left( \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \right)$  vérifie le critère des séries alternées. Sa somme est donc du signe de son premier terme, ici positif, et est majorée en valeur absolue par la valeur absolue du premier terme, ici  $1 - 1/2^x$ . On trouve bien que

$$0 \leq -1 + 2\mu(x) \leq 1 - \frac{1}{2^x}.$$

Il suffit d'écrire que

$$\frac{1}{2} \leq \mu(x) \leq 1 - \frac{1}{2^{x+1}}$$

et d'appliquer le théorème des gendarmes pour conclure que  $\lim_{x \rightarrow 0} \mu(x) = \frac{1}{2}$ .

5. C'est un calcul simple si on remarque que  $\mu(x) = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)^x}$ .

6. Fixons  $x > 0$ . Alors la suite  $n \mapsto \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}$  tend vers 0 et est décroissante (par exemple, en utilisant le théorème des accroissements finis ou en étudiant la fonction  $u \mapsto \frac{1}{u^x} - \frac{1}{(u+1)^x}$ ). En particulier, la série  $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \left( \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \right)$  vérifie le critère des séries alternées. Sa somme est donc du signe de son premier terme, ici positif, et est majorée en valeur absolue par la valeur absolue du premier terme, ici  $1 - 1/2^x$ . On trouve bien que

$$0 \leq -1 + 2\mu(x) \leq 1 - \frac{1}{2^x}.$$

7. Il suffit d'écrire que

$$\frac{1}{2} \leq \mu(x) \leq 1 - \frac{1}{2^{x+1}}$$

et d'appliquer le théorème des gendarmes pour conclure que  $\lim_{x \rightarrow 0} \mu(x) = \frac{1}{2}$ .

### Correction de l'exercice 38 ▲

1. La convergence simple sur  $[0, +\infty[$  est immédiate. Pour la convergence normale, remarquons que le maximum de  $xe^{-nx}$  sur  $[0, +\infty[$  est  $\frac{1}{en}$ . Donc  $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{en \ln n}$ . Mais la série de Bertrand  $\frac{1}{n \ln n}$  diverge, et notre série ne converge pas normalement sur  $[0, +\infty[$ . Prouvons maintenant la convergence uniforme : pour  $x > 0$ , on a :

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{x}{\ln n + 1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-kx} = \frac{xe^{-nx}}{(e^x - 1) \ln(n+1)} \leq \frac{1}{\ln(n+1)},$$

où on a utilisé pour la dernière inégalité que  $e^x - 1 \geq x$ . Puisque  $R_n(0) = 0$ , l'inégalité

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$$

est vraie sur  $[0, +\infty[$  : il y a convergence uniforme sur  $[0, +\infty[$ .

2. On peut prouver que  $S$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$  en étudiant la convergence uniforme de  $S'$  sur  $[a, b] \subset ]0, +\infty[$ . Mais il y a plus malin : posons  $A(u) = \sum_{n \geq 2} \frac{u^n}{\ln n}$ . Cette série entière a pour rayon de convergence 1 d'après la règle de D'Alembert. La fonction  $A$  est donc  $C^\infty$  sur  $] -1, 1[$ . Comme  $x \mapsto e^{-x}$  est de classe  $C^\infty$  et envoie  $]0, +\infty[$  sur  $]0, 1[$ , la fonction  $S$  définie par  $S(x) = xA(e^{-x})$  est  $C^\infty$  sur  $]0, +\infty[$ .

3. On a, pour  $x > 0$ , et  $N > 0$  :

$$\frac{S(x)}{x} \geq \sum_{n=2}^N \frac{e^{-nx}}{\ln n} \geq e^{-Nx} \sum_{n=2}^N \frac{1}{\ln n}.$$

Posons  $x_N = \frac{1}{N}$ . On a  $e^{-Nx} = \frac{1}{e}$ , et

$$\frac{S(x_N)}{x_N} \geq \frac{1}{e} \sum_{n=2}^N \frac{1}{\ln n}.$$

$S$  n'est pas dérivable en 0 (en travaillant un tout petit peu plus, on aurait pu prouver que la limite de  $S(x)/x$  en 0 est  $+\infty$ ).

4. Avec les notations de la deuxième question, on a  $A(u) \sim_0 \frac{u^2}{\ln 2}$ . Donc  $S(x) \sim_{+\infty} \frac{xe^{-2x}}{\ln 2}$ , ce qui prouve bien ce que l'on cherchait à montrer. Cette méthode est assez astucieuse. On pouvait également faire plus classique en utilisant une méthode de "double limite".

### Correction de l'exercice 39 ▲

1. Soit  $x \in [-a, a]$ . Alors

$$\left| \phi\left(\frac{x}{2^n}\right) \right| \leq C \frac{|x|}{2^n} \leq \frac{Ca}{2^n}.$$

Or la série numérique  $\sum_n Ca/2^n$  est convergente. La série de fonctions  $\sum_n \phi\left(\frac{x}{2^n}\right)$  est bien normalement convergente sur  $[-a, a]$ .

2. On remarque d'abord que  $\phi(0) = 0$  et donc que

$$h(0) = \sum_{n \geq 0} \phi(0) = 0.$$

Ensuite, chaque fonction  $x \mapsto \phi(x/2^n)$  est continue sur  $[-a, a]$ . Par convergence normale, la fonction  $h$ , somme de la série  $\sum_n \phi(x/2^n)$ , est elle aussi continue sur  $[-a, a]$ . Enfin, on a, pour tout  $x \in [-a, a]$ ,

$$\begin{aligned} h(x) - h(x/2) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \phi\left(\frac{x}{2^n}\right) - \sum_{n=0}^{+\infty} \phi\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \phi\left(\frac{x}{2^n}\right) - \sum_{n=1}^{+\infty} \phi\left(\frac{x}{2^n}\right) \\ &= \phi(x) \end{aligned}$$

où on a fait un changement d'indice dans la deuxième somme.

3. Soit  $g$  une fonction vérifiant  $\mathcal{P}$ . Alors, puisque  $g$  et  $h$  vérifient tous les deux  $\mathcal{P}$ , on sait que, pour tout  $x \in [-a, a]$ , on a

$$h(x) - h(x/2) = g(x) - g(x/2) \iff h(x) - g(x) = h(x/2) - g(x/2).$$

En particulier, par une récurrence facile, on peut démontrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$h(x) - g(x) = h(x/2^n) - g(x/2^n).$$

Faisons tendre  $n$  vers  $+\infty$  dans cette égalité. Puisque les fonctions  $h$  et  $g$  sont continues en 0, on obtient

$$h(x) - g(x) = h(0) - g(0) = 0.$$

Ainsi,  $g = h$  et  $h$  est l'unique fonction vérifiant  $\mathcal{P}$ .

4. Posons, pour  $n \geq 0$ ,  $u_n(x) = \phi(x/2^n)$ . Alors chaque  $u_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et vérifie, pour tout  $x \in [-a, a]$ ,  $u'_n(x) = \frac{1}{2^n} \phi'\left(\frac{x}{2^n}\right)$ . Puisque  $\phi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $\phi'$  est continue sur le segment  $[-a, a]$ . Elle y est donc bornée, et il existe  $M > 0$  tel que  $|\phi'(x)| \leq M$  pour tout  $x \in [-a, a]$ . On en déduit que

$$|u'_n(x)| \leq \frac{M}{2^n}.$$

La série  $\sum_{n \geq 0} u'_n$  est donc normalement convergente sur  $[-a, a]$ . On en déduit que  $h$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[-a, a]$  et que, pour tout  $x \in [-a, a]$ ,  $h'(x) = \sum_{n \geq 0} u'_n(x)$ .

---

### Correction de l'exercice 40 ▲

1. On va commencer par démontrer que, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|f_n - f_{n-1}\|_\infty.$$

En effet, si  $x \in [0, 1]$ , on a

$$\begin{aligned} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| &= \frac{1}{2} \left| \int_0^x (f_n(t^2) - f_{n-1}(t^2)) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^x |f_n(t^2) - f_{n-1}(t^2)| dt \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^x \|f_n - f_{n-1}\|_\infty dt \\ &\leq \frac{1}{2} \|f_n - f_{n-1}\|_\infty. \end{aligned}$$

Par récurrence, on trouve que, pour tout  $n \geq 1$ , on a

$$\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{2^n} \|f_1 - f_0\|_\infty.$$

Ceci est le terme général d'une série convergente. Donc la série  $\sum_{n \geq 0} (f_{n+1} - f_n)$  converge normalement sur  $[0, 1]$ . Notons  $g$  la somme de cette série.

2. On remarque que, pour tout  $N \geq 1$ ,  $\sum_{n=0}^{N-1} (f_{n+1} - f_n) = f_N - f_0$ . Ainsi, on a

$$\|f_N - (g + f_0)\|_\infty \leq \left\| \sum_{n=0}^{N-1} (f_{n+1} - f_n) - g \right\|_\infty.$$

Ceci prouve que  $(f_n)$  converge uniformément vers  $g + f_0$  sur  $[0, 1]$ .

3. Fixons  $x \in [0, 1]$  et remarquons que, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$f_{n+1}(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x f_n(t^2) dt.$$

On fait tendre  $n$  vers  $+\infty$ . Pour cela, on remarque que  $t \mapsto f_n(t^2)$  converge uniformément vers  $t \mapsto f(t^2)$  sur  $[0, x]$ . En effet, pour tout  $t \in [0, x]$ ,

$$|f_n(t^2) - f(t^2)| \leq \|f_n - f\|_\infty.$$

On peut donc échanger l'intégrale et la limite et on obtient bien

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x f(t^2) dt.$$

### Correction de l'exercice 41 ▲

On commence par considérer  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de polynômes qui converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, b]$ . On va la modifier pour que la nouvelle suite vérifie la condition supplémentaire. Pour cela, on pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$P_n = Q_n - Q_n(c) + f(c).$$

Alors il est clair que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n$  est un polynôme et que  $P_n(c) = f(c)$ . De plus, d'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\|P_n - f\|_\infty \leq \|Q_n - f\|_\infty + |Q_n(c) - f(c)| \leq 2\|Q_n - f\|_\infty.$$

Ainsi, la suite  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge elle aussi uniformément vers  $f$  sur  $[a, b]$ .

---

### Correction de l'exercice 42 ▲

1. Par linéarité de l'intégrale, pour tout polynôme  $P$ , on a

$$\int_a^b f(t)P(t)dt = 0.$$

Par le théorème de Weierstrass, on sait qu'il existe une suite  $(P_n)$  de polynômes qui converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, b]$ . Mais alors,  $(fP_n)$  converge uniformément vers  $f^2$  sur  $[a, b]$ . En effet,  $|f|$  étant continue sur  $[a, b]$ , elle y est majorée par une constante  $M > 0$ . Donc, pour tout  $t \in [a, b]$ , on a

$$|f^2(t) - f(t)P_n(t)| \leq M|f(t) - P_n(t)| \leq M\|f - P_n\|_\infty.$$

Par le théorème de permutation limite/intégrale sous l'hypothèse de convergence uniforme, on a donc

$$\int_a^b f^2(t)dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t)P_n(t)dt = 0.$$

2.  $f^2$  est une fonction continue, positive et d'intégrale nulle sur  $[a, b]$ . Elle est donc identiquement nulle sur  $[a, b]$ . Il en est de même pour  $f$ .

---

### Correction de l'exercice 43 ▲

1. On va faire une intégration par parties pour exprimer autrement l'intégrale, en prenant une primitive de  $t \mapsto e^{i\lambda t}$  et en dérivant  $f$ . Pour tout  $\lambda > 0$ , on a donc

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt &= \left[ f(t) \frac{e^{i\lambda t}}{i\lambda} \right]_a^b - \frac{1}{i\lambda} \int_a^b f'(t)e^{i\lambda t}dt \\ &= \frac{f(b)e^{i\lambda b} - f(a)e^{i\lambda a} - \int_a^b f'(t)e^{i\lambda t}dt}{i\lambda}. \end{aligned}$$

On en déduit, par l'inégalité triangulaire,

$$\left| \int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt \right| \leq \frac{|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(t)|dt}{\lambda}.$$

Par le théorème des gendarmes, on en déduit le résultat voulu.

2. Soit  $\varepsilon > 0$ . Par le théorème de Weierstrass, il existe un polynôme  $P$  tel que  $\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - P(x)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$ . On en déduit que

$$\int_a^b |f(t) - P(t)|dt \leq \varepsilon.$$

De plus, il existe  $\lambda_0 > 0$  tel que, pour tout  $\lambda \geq \lambda_0$ ,

$$\left| \int_a^b P(t)e^{i\lambda t}dt \right| \leq \varepsilon.$$

Finalement, on a pour tout  $\lambda \geq \lambda_0$ ,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt \right| &\leq \left| \int_a^b (f(t) - P(t))e^{i\lambda t}dt \right| + \left| \int_a^b P(t)e^{i\lambda t}dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(t) - P(t)|dt + \varepsilon \\ &\leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, le résultat s'étend bien aux fonctions qui sont seulement continues.

---

**Correction de l'exercice 44 ▲**

---

On va commencer par prolonger  $f$  par parité en posant, pour  $x < 0$ ,  $f(x) = f(-x)$ . Remarquons que ce prolongement est continue sur  $[-1, 1]$  (seul le problème de continuité en 0 se pose). Par le théorème de Weierstrass, il existe une suite  $(Q_n)$  de polynômes qui converge uniformément vers  $f$  sur  $[-1, 1]$ . On va rendre ces polynômes pairs. Pour cela, on pose, pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \geq 1$ ,

$$P_n(x) = \frac{Q_n(x) + Q_n(-x)}{2}.$$

On vérifie que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $n \geq 1$ ,  $P_n(-x) = P_n(x)$  et donc  $P_n$  est bien un polynôme pair. De plus, pour tout  $x \in [0, 1]$ , on a

$$\begin{aligned} |P_n(x) - f(x)| &= \left| \frac{Q_n(x) + Q_n(-x)}{2} - \frac{f(x) + f(-x)}{2} \right| \\ &\leq \frac{1}{2} (|Q_n(x) - f(x)| + |Q_n(-x) - f(-x)|) \\ &\leq \|f - Q_n\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite de polynômes pair  $(P_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$ .

---